

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY

E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON

W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

49. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 3. JANUAR 1944)



BERLIN
SPRINGER-VERLAG

1944

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,

K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,

R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,

E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107 IV,

F. K. Schmidt, Flughafen Alirng, Post Freilassing (Obb.).

49. Band.

Inhalt:

3. Heft.

Seite

Lorenzen, Dr. P., Wesermünde, Marineschule 1/I: Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik	313
Wagner, 44-UScha. E., Feldpost-Nr. 22 728 A (Heimatanschrift: Trautenau, Sudeten, Gartenstadt 18): Die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix	328
Horn, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. J., Darmstadt, Mathildenstraße 10: Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. I.	339
Tietze, Prof. Dr. H., München 23, Trautenwolfstraße 7: Über Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen für die Figur und für ihr Spiegelbild	351
Hadwiger, Prof. Dr. H., Bern, Hochfeldstraße 31: Über extreme Punktverteilungen in ebenen Gebieten	370
Hornich, Dr. H., Wien 117, Gallmeyergasse 12: Über gewisse trigonometrische Integrale. II.	374
Müller, Prof. Dr. M., Tübingen, Mathem. Institut der Univ.: Abschätzung des Fehlers bei der Tangentennäherungskonstruktion von Pirani	380
Bol, Prof. Dr. G., Greifswald, Mathem. Seminar der Univ.: Über Nabelpunkte auf einer Eifläche	389
Reisch, Ltn. P., Feldpost-Nr. 40 090 E: Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\Phi(X)\Phi(Y) = \Phi(XY)$	411
Löbell, Prof. Dr. F., München 2, NW, Walter von Dyck-Platz 1: Zur Theorie der Flächenabbildungen	427
Petersson, Prof. Dr. H., Straßburg-Neuhof, Ganzauweg 143: Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension -2 zu den hyperbolischen Fixpunktpaaren	441
Bödewadt, Dr. U. T., Posen 2, Mathem. Inst., Friedrich-Nietzsche-Straße 2: Zur Iteration reeller Funktionen	497

Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik.

Von

Paul Lorenzen, zur Zeit in Wesermünde.

Einleitung	313
§ 1. Permutationsgruppen	314
§ 2. Die Gruppenaxiome	315
§ 3. Unvollständige Systeme	319
§ 4. Die vollständigen viergliedrigen Systeme	320
§ 5. Assoziativaxiome	321
§ 6. Die vollständigen dreigliedrigen Systeme	323

Einleitung.

Diese Arbeit gibt eine Aufstellung *aller* kürzesten Axiomensysteme für Gruppen, die aus den Axiomen des § 2 bestehen. § 2 enthält alle Axiome, die in der Gruppenaxiomatik gebräuchlich sind, mit Ausnahme der verschiedenen Formen des Assoziativaxioms. Als Assoziativaxiom wird das Axiom A (vgl. § 2) von BAER-LEVI¹⁾ benutzt, das bei eindeutiger Multiplikation dem üblichen $a(bc) = (ab)c$ äquivalent ist, sonst aber schwächer ist. Es zeigt sich, daß auch mit A ein Axiomensystem für Gruppen aufgestellt werden kann, das — genau wie das System des Verf.²⁾ — nur noch ein allgemeines Unitäts-, ein allgemeines Existenzaxiom und das Axiom rEi (vgl. § 2) enthält. Man ist berechtigt, das neue System „schwächer“ als das bekannte GARVERsche System³⁾ (vgl. § 4) zu nennen.

In den letzten Paragraphen werden Assoziativaxiome benutzt, die stärker als A sind, wodurch es möglich wird, alle viergliedrigen Systeme des § 4 noch zu kürzen. Man erhält sieben verschiedene dreigliedrige Systeme.

Die ganze Arbeit ist ohne Vorkenntnisse lesbar, da in § 1 der Gruppenbegriff aus der Theorie der Permutationen abgeleitet wird.

Herrn Prof. H. SCHOLZ danke ich sehr für seine Anregungen und sein Interesse an diesem Beitrage.

¹⁾ Sitz.ber. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1932, S. 3.

²⁾ J. f. Math. 182, 1940.

³⁾ Amer. J. Math. 57 (1935), S. 276.

§ 1.

Permutationsgruppen.

Der allgemeine Gruppenbegriff ist aus der Theorie der Permutationen entstanden. Unter einer Permutation φ einer Menge M versteht man eine eindeutige Abbildung $a \rightarrow \varphi a$ von M auf sich.

Zunächst interessiert uns, daß sich aus je zwei Permutationen von M $a \rightarrow \varphi a$ und $a \rightarrow \psi a$ neue Permutationen bilden lassen: $a \rightarrow \varphi(\psi a)$ ist eine Permutation, die wir mit $\varphi\psi$ bezeichnen, ebenso ist $\psi a \rightarrow \varphi a$ eine Permutation. Wir bezeichnen diese mit φ/ψ . Die Verknüpfungen je zweier Permutationen φ, ψ zu $\varphi\psi$ und φ/ψ sind nicht unabhängig voneinander: es gilt nämlich stets

$$\varphi\psi/\psi = \varphi.$$

Hieraus ergibt sich, daß wir beide Verknüpfungen aus einer einzigen dreistelligen Relation ableiten können. Dazu definieren wir für je drei Permutationen φ, ψ, χ von M eine Relation $\frac{\varphi\psi}{\chi}$ durch:

$\frac{\varphi\psi}{\chi}$ ist genau dann wahr, wenn $\varphi\psi = \chi$, also $\chi/\psi = \varphi$ ist.

Als nächstes definieren wir jetzt die Permutationsgruppen einer Menge M :

Eine Permutationsgruppe G von M ist eine nichtleere Menge von Permutationen von M , die mit φ und ψ auch φ/ψ enthält.

Da eine Permutationsgruppe G mindestens eine Permutation φ enthält, enthält G auch φ/φ . φ/φ ist die „identische Permutation“ $a \rightarrow a$. $\varphi/\varphi/\varphi$ ist die „zu φ inverse Permutation“ $\varphi a \rightarrow a$, die wir mit φ' bezeichnen.

Die Zuordnung $\varphi \longleftrightarrow \varphi'$ ist also eine eindeutige Zuordnung von G zu sich. Für drei Permutationen φ, ψ und χ von G ist ersichtlich $\frac{\varphi\psi}{\chi}$ genau dann wahr, wenn $\frac{\psi'\varphi'}{\chi'}$ wahr ist. Demnach ist eine nichtleere Menge G von Permutationen von M nicht nur durch:

1) G enthält mit χ und ψ auch eine Permutation φ mit $\frac{\varphi\psi}{\chi}$, sondern auch durch:

2) G enthält mit χ und φ auch eine Permutation ψ mit $\frac{\varphi\psi}{\chi}$, als Permutationsgruppe gekennzeichnet.

Nach der Definition der Permutationsgruppen wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Gruppenbegriff zu.

Dazu sei A eine Menge, in der eine dreistellige Relation R erklärt ist, d. h. je drei Elementen a, b, c von A sei eine Aussage $R(a, b, c)$ zugeordnet. Da zwei Relationen R_1 und R_2 in A dann als gleich betrachtet werden, wenn

$R_1(a, b, c)$ genau dann wahr ist, wenn $R_2(a, b, c)$ wahr ist, interessieren von A nur die Elemente a, b, c , für die $R(a, b, c)$ wahr ist. Die Vereinigungsmenge dieser Elemente bezeichnen wir als das „Feld“ (R) von R .

Ist $\bar{R}$ eine dreistellige Relation in einer Menge $\bar{A}$, so heißt $\bar{R}$ isomorph zu R , wenn es eine eindeutige Abbildung $a \rightarrow \bar{a}$ von (R) auf $(\bar{R})$ gibt, so daß $\bar{R}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ genau dann wahr ist, wenn $R(a, b, c)$ wahr ist.

Wir haben gesehen, daß sich in jeder Permutationsgruppe eine dreistellige Relation $\frac{\varphi \psi}{\chi}$ erklären läßt. Jede zu einer solchen Relation isomorphe Relation nennen wir eine *Gruppenrelation*.

Die Aufgabe der Gruppenaxiomatik läßt sich jetzt dahingehend formulieren, möglichst einfache Bedingungen oder Axiome anzugeben, denen eine Relation R genau dann genügt, wenn R eine Gruppenrelation ist.

Ehe wir im nächsten Paragraphen einen Weg zur Lösung dieser Aufgabe beschreiben, bemerken wir noch, daß mit der Relation R auch die „zu R inverse Relation“ R' , für die $R'(a, b, c)$ genau dann wahr ist, wenn $R(b, a, c)$ wahr ist, eine Gruppenrelation ist. Denn ist $a \rightarrow \varphi$ eine bezüglich R isomorphe Abbildung von (R) auf eine Permutationsgruppe, so ist die Abbildung $a \rightarrow \varphi'$ isomorph bezüglich R' .

§ 2.

Die Gruppenaxiome.

Eine Kennzeichnung der Gruppenrelationen von ganz anderer Art als in § 1 wird durch die folgende Betrachtung nahegelegt. Es sei G eine Permutationsgruppe und a, b, c seien Elemente von G , für die $\frac{ab}{c}$ wahr ist. Durch je zwei Elemente von a, b, c ist das dritte eindeutig bestimmt. Jedem Element a von G läßt sich also eine Permutation φ_a von G zuordnen, die b genau dann auf c abbildet, wenn $\frac{ab}{c}$ wahr ist, d. h. $\varphi_a b = ab$. Die Abbildung $a \rightarrow \varphi_a$ ist isomorph bezüglich der Relation $\frac{ab}{c}$, da $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$ ist, denn für alle c von G gilt $\varphi_{ab} c = (ab)c$ und $\varphi_a \varphi_b c = a(bc)$. Es sei nun eine beliebige dreistellige Relation R vorgelegt. Statt $R(a, b, c)$ schreiben wir kürzer $\frac{ab}{c}$ und wollen annehmen, daß R die folgenden Axiome erfüllt:

- U : Für alle a, b von (R) gibt es höchstens ein Element c von (R) mit $\frac{ab}{c}$.
 rU : Für alle a, c von (R) gibt es höchstens ein Element b von (R) mit $\frac{ab}{c}$.
 E : Für alle a, b von (R) gibt es mindestens ein Element c von (R) mit $\frac{ab}{c}$.
 rE : Für alle a, c von (R) gibt es mindestens ein Element b von (R) mit $\frac{ab}{c}$.

Bezeichnen wir dann mit ab das wegen U und E eindeutig bestimmte Element c , für das $\frac{a b}{c}$ wahr ist, so wird durch $\varphi_a b = ab$ wie oben jedem Element a von (R) eine Permutation φ_a von (R) zugeordnet.

Diese Zuordnung $a \rightarrow \varphi_a$ ist eineindeutig, wenn R dem Axiom

lu : Ist für alle b, c von (R) genau dann $\frac{a_1 b}{c}$ wahr, wenn $\frac{a_2 b}{c}$ wahr ist, so ist

$$a_1 = a_2$$

genügt, und ist isomorph bezüglich R , wenn R dem Axiom

$$A: \text{Für alle } a, b, c \text{ von } (R) \text{ gilt } a(bc) = (ab)c$$

genügt.

Um nun schließen zu können, daß R eine Gruppenrelation ist, müssen wir nur noch zeigen, daß die Permutationen von (R) eine Permutationsgruppe bilden. Dazu muß R dem Axiom

$$i: \text{Es gibt ein } e \text{ mit } e \in (R)$$

genügen. Wegen 2) § 1 folgt jetzt aus i und rE , daß die Permutationen φ_a eine Gruppe bilden.

Damit ist also gezeigt, daß eine Relation R genau dann eine Gruppenrelation ist, wenn R den Axiomen A , U , rU , E , rE , lu und i genügt.

Nachdem einmal diese Kennzeichnung der Gruppenrelationen gewonnen ist, entsteht sofort die Frage nach weiteren und womöglich „einfacheren“ Kennzeichnungen durch ähnliche Axiome. Wir wollen diese Frage systematisch beantworten und geben zunächst eine Aufstellung aller Axiome, die von uns in Betracht gezogen werden sollen:

- 1) Die allgemeinen Unitätsaxiome, zu denen wir außer U und rU noch

lU : Für alle b, c von (R) gibt es höchstens ein Element a von (R) mit $\frac{a b}{c}$,

und außer lu noch

u : Ist für alle a, b von (R) genau dann $\frac{a b}{c_1}$ wahr, wenn $\frac{a b}{c_2}$ wahr ist, so ist $c_1 = c_2$,

ru : Ist für alle a, c von (R) genau dann $\frac{a b_1}{c}$ wahr, wenn $\frac{a b_2}{c}$ wahr ist, so ist $b_1 = b_2$,

hinzurechnen.

- 2) Die allgemeinen Existenzaxiome E , rE und

lE : Für alle b, c von (R) gibt es mindestens ein Element a von (R) mit $\frac{a b}{c}$.

3) Die Einsaxiome

lI : Es gibt ein e mit $\frac{ea}{a}$ für alle Elemente a von (R) ,

rI : Es gibt ein e mit $\frac{ae}{a}$ für alle Elemente a von (R) ,

I : Es gibt ein e mit $\frac{ee}{e}$,

li : Es gibt ein e mit $\frac{ea}{a}$ für ein Element a von (R) ,

ri : Es gibt ein e mit $\frac{ae}{a}$ für ein Element a von (R) .

Diese Axiome und i lassen sich alle in der Form

J : Es gibt ein e mit $J(e)$

schreiben. Sie sind offensichtlich nicht unabhängig voneinander, sondern I ist eine Folge von lI oder rI , ebenso ist i eine Folge von li oder ri . Andererseits folgt li bzw. ri aus I , aber auch aus lE bzw. rE .

4) Die speziellen Unitätsaxiome

lUJ : Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) höchstens ein Element a' von (R) mit $\frac{a'a}{e}$ gibt,

rUJ : Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) höchstens ein Element a' von (R) mit $\frac{aa'}{e}$ gibt,

wobei J ein beliebiges Einsaxiom oder i bezeichnet.

5) Die speziellen Existenzaxiome

lEJ : Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) mindestens ein Element a' von (R) mit $\frac{a'a}{e}$ gibt,

rEJ : Es gibt ein e mit $J(e)$, zu dem es zu jedem a von (R) mindestens ein Element a' von (R) mit $\frac{aa'}{e}$ gibt,

wobei wieder J ein beliebiges Einsaxiom oder i ist.

Als letztes Gruppenaxiom wählen wir A , das wir ohne Voraussetzung von U oder E in der Form von BAER-LEVI¹⁾ benutzen wollen. Um diese Formulierung übersichtlich hinschreiben zu können, führen wir die folgende abkürzende Schreibweise ein, die wir in der ganzen Arbeit benutzen werden:

Wir schreiben $\frac{a b c}{d'}$ für die logische Summe von $\frac{a b}{d'}$ und $\frac{d' c}{d''}$. Wir schreiben

$\frac{a b c}{d''}$ für die logische Summe von $\frac{b c}{d'}$ und $\frac{a d'}{d''}$ und $\frac{d''}{\frac{a b c}{d'}}$ für die logische Summe von $\frac{a b c}{d'}$ und $\frac{a b c}{d''}$.

Das letzte Axiom lautet jetzt:

A : Für alle a, b, c, d', d'', d''' von (R) mit $\frac{d''}{\frac{a b c}{d'}}$ gibt es d', d'' von (R)

mit $\frac{d''}{\frac{a b c}{d'}}$.

Alle diese Axiome bezeichnen wir als Gruppenaxiome, und es ist also unsere Aufgabe, Systeme von Gruppenaxiomen zu suchen, mit der Eigenschaft, daß jede Relation, die allen Axiomen des Systems genügt, eine Gruppenrelation ist. Jedes System von Gruppenaxiomen mit dieser Eigenschaft nennen wir vollständig.

Wir haben gesehen, daß das System $A, U, rU, E, rE, l u, i$ vollständig ist. Wegen der Schlußbemerkung von § 1 folgt hieraus sofort die Vollständigkeit von $A, U, l U, E, l E, r u, i$. Denn genügt eine Relation R den Axiomen dieses Systems, so genügt die zu R inverse Relation R' ersichtlich den Axiomen $A, U, rU, E, rE, l u, i$. Also ist R' eine Gruppenrelation, woraus aber folgt, daß auch R eine Gruppenrelation ist.

Allgemein erhalten wir aus einem beliebigen vollständigen System durch Vertauschung von l und r (bei der die Axiome A, U, E, I, i ungeändert bleiben) wieder ein vollständiges System.

Die Frage nach „möglichst einfachen“ vollständigen Systemen führt uns dazu, alle Systeme mit möglichst wenig Axiomen, also alle kürzesten vollständigen Systeme, zu bestimmen. Wir werden in § 4 sehen, daß jedes vollständige System mindestens vier Axiome enthält und werden dort auch alle viergliedrigen vollständigen Systeme aufstellen. Die Vollständigkeitsbeweise geben wir allerdings — um Wiederholungen zu vermeiden — erst in § 6.

Zunächst betrachten wir zur Vorbereitung von § 4 einige unvollständige Systeme.

§ 3.

Unvollständige Systeme.

Wir beweisen die Unvollständigkeit eines Systems durch explizite Aufweisung einer Relation, die alle Axiome des Systems erfüllt, aber keine Gruppenrelation ist. Diese Aufweisung geschieht durch Hinschreiben einer „Multiplikationstafel“, die jedem geordneten Paar a, b von Elementen einer Menge A eine Untermenge ab von A zuordnet. Dadurch wird diejenige Relation definiert, für die $\frac{ab}{c}$ genau dann wahr ist, wenn $c \in ab$.

1)	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	5	6	4
3	3	1	2	6	4	5
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

Definiert eine Relation, die alle Gruppenaxiome außer A erfüllt, denn es ist z. B.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 2 \\ 4 \ 5 \ 6 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \end{array}$$

2)	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1, 3	0
3	3	0	1, 2

Hier sind alle Gruppenaxiome außer U und E erfüllt, wie man sofort nachprüfen kann.

3)	1	1, 2
1	1	2
2	2	1, 2

Hier sind alle Gruppenaxiome außer U , lU und rU erfüllt.

4)	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	0
3	3	0	1

erfüllt alle Gruppenaxiome außer E , lE und rE .

Um im nächsten Paragraphen beweisen zu können, daß die dort aufgestellten viergliedrigen vollständigen Systeme die einzig möglichen sind, brauchen wir noch die Unvollständigkeit von drei weiteren Systemen.

Das System $\alpha)$ A, U, lU, E, lE, rI ist unvollständig.

Beweis:

	1	2
1	1	1
2	2	2

Die Unvollständigkeit der beiden letzten zu betrachtenden Systeme läßt sich nur durch Relationen in unendlichen Mengen beweisen.

Es sei dazu M eine abzählbar unendliche Menge und A die Menge aller eindeutigen Abbildungen $a \rightarrow qa$ von M in sich. q ist also eine eindeutige Abbildung von M auf die Untermenge qM von M .

Die Relation $\frac{\varphi\psi}{\chi}$, die genau dann wahr ist, wenn $\varphi(\psi a) = \chi a$ für alle Elemente a von M ist, erfüllt die Axiome des Systems

$$\beta) A, U, lU, rU, E, lI, rI,$$

ist aber keine Gruppenrelation, da sie z. B. lE nicht erfüllt. Also ist $\beta)$ ein unvollständiges System.

Ebenso ist die Relation $\frac{\varphi\psi}{\chi}$, die genau dann wahr ist, wenn für alle Elemente a von M $\varphi(\psi a) = \chi a$ ist, und außerdem die Mengen $M - \varphi M$ und $M - \psi M$ unendlich sind¹⁾, keine Gruppenrelation, erfüllt aber die Axiome des Systems

$$\gamma) A, U, rU, E, lE, li,$$

dessen Unvollständigkeit damit bewiesen ist.

§ 4.

Die vollständigen viergliedrigen Systeme.

Aus 1) im letzten Paragraphen folgt, daß jedes System von Gruppenaxiomen unvollständig ist, das A nicht enthält. Jedes vollständige System muß also A enthalten. Genau so ersieht man aus 2) bzw. 3) bzw. 4), daß jedes vollständige System U oder E bzw. U oder lU oder rU bzw. E oder lE oder rE enthalten muß.

Sehen wir hier, wie auch stets im folgenden, von der Vertauschung von l und r ab, so ergibt sich, daß jedes vollständige System A, U, E oder A, U, lE oder A, lU, E enthalten muß. Wie das System $\alpha)$ in § 3 zeigt, sind die drei Systeme A, U, E ; A, U, lE und A, lU, E unvollständig, sogar auch noch, wenn man rI als viertes Axiom hinzunimmt.

Jedes vollständige System ist also mindestens viergliedrig, und es wird jetzt unsere Aufgabe sein, alle vollständigen viergliedrigen Systeme aufzustellen. Wir nehmen zunächst die Systeme, die A, U und E enthalten und haben also alle Gruppenaxiome darauf zu untersuchen, ob sie, als viertes Axiom zu A, U und E genommen, ein vollständiges System ergeben. Als viertes Axiom kommen die Einsaxiome und auch die allgemeinen Unitätsaxiome wegen $\beta)$ nicht in Frage, ebenso die allgemeinen Existenzaxiome wegen $\alpha)$ nicht. Von den speziellen Existenzaxiomen bleibt wegen $\alpha)$ allein $lElI$ übrig.

Das System $A, U, E, lElI$ ist nun in der Tat vollständig, wie zuerst DICKSON⁴⁾ zeigte. Von uns wird die Vollständigkeit dieses Systems in § 6 mitbewiesen werden.

⁴⁾ Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), S. 198.

Dort werden wir auch beweisen, daß die folgenden Systeme vollständig sind:

$$A, U, lE, lI$$

$$A, U, lE, rEi$$

$$A, U, lE, rUri.$$

A, U, lE ergibt also mit jedem Axiom, das lI enthält, mit rUI oder $rU rI$, mit jedem Axiom rEJ und auch mit rE und i ein vollständiges System. Jedes andere Axiom als viertes Axiom hinzugenommen, führt zu einem unvollständigen System: nämlich lU und rI wegen α) und E, rU und $rU li$ wegen γ).

Die Vollständigkeit des Systems A, U, lE, lI wurde von GARVER³⁾ bewiesen. Will man entscheiden, ob das System A, U, lE, rEi „schwächer“ ist als das GARVERsche System, so hat man nur zu untersuchen, in welchem Sinne das Axiom rEi „schwächer“ ist als lI .

Nun ist das folgende Axiom:

Es gibt ein e , zu dem es zu jedem a von (R) mindestens ein Element b von (R) mit $\frac{ea}{b}$ gibt

augenscheinlich eine Folge von lI , aber nicht umgekehrt. Dieses neue Axiom ist also sicher „schwächer“ als lI . Da es nun aber aus rEi durch bloße Vertauschung der Reihenfolge hervorgeht, ist es gerechtfertigt, auch rEi „schwächer“ als lI zu nennen.

Um alle vollständigen viergliedrigen Systeme aufzustellen, müssen wir nur noch die Systeme untersuchen, die A, lU und E enthalten. Wir zeigen in § 6 die Vollständigkeit der Systeme

$$A, lU, E, lElI$$

$$A, lU, E, rElI.$$

Auch hier ist kein anderes Axiom als viertes Axiom möglich: ein Unitätsaxiom nicht wegen β), lE und $lErI$ nicht wegen α) und rE und $rErI$ nicht wegen γ).

§ 5.

Assoziativaxiome.

Da jedes vollständige System A und U oder E enthalten muß, liegt es nahe, statt A Assoziativaxiome zu benutzen, aus denen sich außer A noch eine Unitäts- oder Existenzaussage folgern läßt.

HUNTINGTON⁵⁾ hat das folgende Axiom eingeführt:

$$UA: \text{ Aus } \frac{\frac{d''}{d'}}{\frac{d''}{d}} \text{ folgt } d'' = d.$$

Aus UA folgt ersichtlich A , aber nicht U . Es läßt sich sogar U auch nicht aus UA , lU , rU , lE und i folgern, wie die folgende Relation zeigt:

	1	2	3	4	...
1	0	0	0	0	...
2	0	0	0	0	...
3	1, 2	0	0	0	...
4	0	1	0	0	...
5	3	0	0	0	...
6	0	2	0	0	...
7	0	0	1	0	...
8	4	0	0	0	...
9	0	3	0	0	...
.		.			
.		...			
.					

(0 bezeichnet die leere Menge)

Dagegen gilt:

1) Aus UA und lI folgt U .

Beweis. Es gibt ein e mit $\frac{ea}{a}$ für alle Elemente a von (R) . Gilt also

$$\frac{ab}{c_1} \text{ und } \frac{ab}{c_2}, \text{ so gilt } \frac{\frac{c_2}{c_1} \frac{ab}{c_2}}{\frac{c_2}{c_1}}, \text{ woraus } c_1 = c_2 \text{ folgt.}$$

Mit 1) können wir jetzt zeigen, daß U auch aus UA , lE und ri folgt. Es gilt nämlich:

2) Aus UA , lE und $ri(e)$ folgt $ri(e)$.

Beweis. Wegen $ri(e)$ gibt es ein Element d mit $\frac{de}{d}$. Zu jedem Element

a von (R) gibt es also wegen lE Elemente a_1 und b mit $\frac{a_1}{b \frac{de}{d}}$,

woraus $a_1 = a$, also $\frac{ae}{a}$ folgt, w. z. b. w.

⁵⁾ Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), S. 27.

Als Assoziativaxiom, das gleichzeitig eine Existenzaussage enthält, benutzen wir

EA : Für alle Elemente a, b, c, d von (R) gibt es genau dann ein Element d' mit $\frac{a b c}{d'}$, wenn es ein Element d'' mit $\frac{a b c}{d''}$ gibt.

Auch hier folgt A , aber nicht E , aus EA . Das Beispiel

	1	2
1	1	2
2	2	0

zeigt, daß E auch nicht aus EA , U , lU , rU , lI und rI folgt.

Dagegen gilt

3) Aus EA und $lE lI$ folgt E .

Beweis. Wegen $lE lI$ gibt es ein Element e mit $\frac{e b}{b}$ für alle Elemente b von (R) und zu jedem Element a von (R) ein Element a' mit $\frac{a' a b}{\frac{e}{b}}$, woraus die Existenz eines Elementes c mit $\frac{a b}{c}$ folgt, w. z. b. w.

Wir begnügen uns hier mit diesen Eigenschaften der Assoziativaxiome UA und EA , um uns wieder der Frage nach allen kürzesten vollständigen Axiomensystemen zuzuwenden.

§ 6.

Die vollständigen dreigliedrigen Systeme.

Wir wollen nun feststellen, welche vollständigen dreigliedrigen Systeme es gibt, wenn wir die Assoziativaxiome UA und EA noch zu den Gruppenaxiomen hinzunehmen. Evident haben wir dazu nur zu untersuchen, ob sich in den vollständigen viergliedrigen Systemen des § 4 die Axiome A und U bzw. E durch UA bzw. EA ersetzen lassen. Wie wir jetzt beweisen werden, entsteht aus jedem viergliedrigen System des § 4 durch diese Ersetzung ein vollständiges System. Wir haben also die Vollständigkeit der folgenden sieben Systeme zu zeigen:

- 1) UA , lE , lI
- 2) UA , lE , $rE i$
- 3) UA , lE , $rU r i$
- 4) UA , E , $lE lI$
- 5) EA , U , $lE lI$
- 6) EA , lU , $lE lI$
- 7) EA , lU , $rE l i$.

Vollständigkeitsbeweis von 1):

R sei eine dreistellige Relation. Wir schreiben $\frac{a \ b}{c}$ statt $\bar{R}(a, b, c)$ und setzen voraus, daß R den Axiomen von 1) genügt. Um zu zeigen, daß R eine Gruppenrelation ist, haben wir nach dem Ergebnis von § 2 nur zu zeigen, daß R auch den Axiomen U , E , lU , ru genügt.

Die Gültigkeit von U ergibt sich direkt aus 1) in § 5. Um auf E schließen zu können, bemerken wir zunächst, daß es wegen lI ein Element e mit $rI(e)$ gibt, denn aus $lI(e)$ folgt zunächst $ri(e)$ und hieraus mit 2) in § 5 auch $rI(e)$. Zu jedem Element b von (R) gibt es also wegen lE Elemente b' und b_1 mit

$\frac{b_1}{e}$
 $\frac{b_1 \ b' \ b}{e}$, woraus $b_1 = b$, also $\frac{b \ b'}{e}$ folgt. Zu jedem Element a von (R) gibt es

$\frac{a_1}{e}$
 $\frac{a_1 \ b \ b'}{c}$, woraus $a_1 = a$, also $\frac{a \ b}{c}$

weiterhin wegen lE stets Elemente c und a_1 mit $\frac{a_1 \ b \ b'}{c}$, woraus $a_1 = a$, also $\frac{a \ b}{c}$

folgt. Dadurch ist die Gültigkeit von E gezeigt. Aus $\frac{a \ b}{c}$ können wir jetzt

$\frac{a}{e}$
 $\frac{a \ b \ b'}{c}$ schließen, woraus $a_1 = a$

also $\frac{c \ b'}{a}$ folgt. Wegen U gibt es also zu zwei Elementen b, c von (R)

höchstens ein Element a mit $\frac{a \ b}{c}$, d. h. R erfüllt das Axiom lU .

Die Gültigkeit von ru schließlich ergibt sich direkt aus der Gültigkeit von lI .

Damit ist die Vollständigkeit des Systems 1) bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 2):

R sei eine Relation, die den Axiomen von 2) genügt. Können wir zeigen, daß R auch dem Axiom lI genügt, so haben wir damit bewiesen, daß R alle Axiome von 1) erfüllt, also eine Gruppenrelation ist.

Es gibt ein Element d von (R) mit $rEi(d)$, also gibt es auch ein Element e mit $\frac{d \ e}{d}$, d. h. mit $ri(e)$. Wegen 2) in § 5 folgt hieraus $rI(e)$. Wegen $rEi(d)$ gibt es ein Element d_1 mit $\frac{e \ d_1}{d}$ und wegen lE gibt es Elemente d' und d''

$\frac{d''}{e}$
 $\frac{d'' \ d' \ d_1}{e}$, woraus $d'' = d$, also $\frac{d \ d'}{e}$ folgt. Wegen lE gibt es ferner zu jedem

Element a von (R) ein Element e_1 mit $\frac{e_1 \ a}{a}$ und Elemente d_2 und e_2 mit

$\frac{e_2}{e}$
 $\frac{e_2 d d'}{d_2}$, woraus $e_1 = e_2$, also $\frac{e_1 d}{d_2}$ folgt. Wegen $rEi(d)$ gibt es ein Element b
 $\frac{e_1}{d_2}$
 $\frac{d_2}{d}$
 $\frac{e_1}{d}$
 $\frac{e_1 d}{d}$ folgt. Damit gilt aber auch $\frac{e_1 d d'}{d}$, woraus
 $\frac{e_1 a b}{a}$
 $\frac{e}{d}$
 $e_1 = e$, also $\frac{e a}{a}$ folgt, d. h. $lI(e)$. Damit ist die Vollständigkeit von 2) bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 3):

Wir führen die Vollständigkeit von 3) auf die Vollständigkeit von 2) zurück, haben also zu zeigen, daß eine Relation R , die den Axiomen von 3) genügt, auch das Axiom rEi erfüllt. Dazu sei R eine Relation, die die Axiome von 3) erfüllt. Es gibt also ein Element e von R mit $rUri(e)$. Nach 2) in § 5 folgt $rI(e)$. Wegen lE gibt es zu jedem Element a von (R) Elemente a'

$\frac{e_1}{e}$
 $\frac{e_1 a' a}{a'}$, woraus $e_1 = e$, also $\frac{e a'}{a'}$ folgt. Wieder wegen lE gibt es
 $\frac{a'_1}{e}$
 $\frac{a'_1 a_1 a'}{e}$, woraus $a'_1 = a'$, also $\frac{a' a_1}{e}$ folgt. Wegen $rUri(e)$

folgt aus $\frac{a' a}{e}$ und $\frac{a' a_1}{e}$ jetzt $a_1 = a$, also wegen $\frac{a_1 a'}{e}$ auch $\frac{a a'}{e}$, d. h. $rEi(e)$.

Damit ist die Vollständigkeit von 3) bewiesen.

Vollständigkeitsbeweis von 4):

Wir führen die Vollständigkeit von 4) auf die Vollständigkeit von 1) zurück. Sei also R eine Relation, die den Axiomen von 4) genügt. Wir haben zu zeigen, daß R das Axiom lE erfüllt.

Es gibt ein Element e mit $lE lI(e)$. Demnach gibt es zu jedem Element c von (R) Elemente c' und c_1 mit $\frac{c' c}{e}$ und $\frac{c_1 c'}{e}$. Wegen E gibt es also ein Element c_2

$\frac{c_2}{e}$
 $\frac{c_2 c' c}{e}$, woraus $c_2 = c$, also $\frac{c_1 e}{c}$ folgt. Wieder wegen E gibt es jetzt
 $\frac{c}{c}$
 $\frac{c}{c}$
 auch ein Element c_3 mit $\frac{c_1 e e}{c}$, woraus $c_3 = c$, also $\frac{c e}{c}$ folgt.

Da es zu jedem Element b von (R) wegen $lE lI(e)$ ein Element b' mit $\frac{b'b}{e}$ gibt, gibt es wegen E auch Elemente a und c_1 mit $\frac{c}{\frac{e}{\frac{c b' b}{a}}}$, woraus $c_1 = c$, also $\frac{a b}{c}$ folgt. Zu je zwei Elementen b, c von (R) gibt es also mindestens ein Element a mit $\frac{a b}{c}$, d. h. das Axiom lE ist erfüllt.

Vollständigkeitsbeweis von 5):

Wegen 3) in § 5 erfüllt jede Relation, die den Axiomen von 5) genügt, auch das Axiom E und also alle Axiome von 4). Damit ist die Vollständigkeit von 5) zurückgeführt auf die Vollständigkeit von 4).

Vollständigkeitsbeweis von 6):

Wir führen die Vollständigkeit von 6) auf die Vollständigkeit von 5) zurück. Sei also R eine Relation, die die Axiome von (6) erfüllt. Wir haben zu zeigen, daß auch das Axiom U erfüllt ist.

Wegen 3) in § 5 gilt zunächst das Axiom E . Ferner gibt es ein Element e von (R) mit $lI(e)$. Es gilt also auch $\frac{e e}{e}$ und wegen E gibt es zu jedem Element c von (R) ein Element c_1 mit $\frac{c e e}{c_1}$, woraus wegen EA die Existenz eines Elementes c_2 mit $\frac{c e e}{c_2}$ folgt. Wegen lU folgt jetzt $c_2 = c$, also $\frac{c e}{c}$. Wegen $lE lI(e)$ gibt es weiterhin ein Element c' mit $\frac{c c' c}{e}$, woraus die Existenz eines Elementes e_1 mit $\frac{c c' c}{e_1}$ folgt. Wieder wegen lU folgt $e_1 = e$, also $\frac{c c'}{e}$.

Jetzt können wir zeigen, daß es zu zwei Elementen a, b von (R) höchstens ein Element c mit $\frac{a b}{c}$ gibt. Denn aus $c' \frac{a b}{c}$ folgt die Existenz eines Elementes b' mit $\frac{c' a b}{b'}$, worin wegen lU zunächst b' und dann auch c' durch a und b eindeutig bestimmt sind. Wegen $\frac{c c'}{e}$ und nochmals lU ist dann auch c durch a und b eindeutig bestimmt.

Also ist das Axiom U erfüllt.

Vollständigkeitsbeweis von 7):

Wir führen die Vollständigkeit von 7) auf die Vollständigkeit von 6) zurück. Sei dazu R eine Relation, die den Axiomen von 7) genügt. Wir haben zu zeigen, daß R das Axiom $lEII$ erfüllt.

Wegen li gibt es Elemente e und c mit $\frac{ec}{c}$, woraus $\frac{e \frac{ec}{c}}{\frac{e}{c}}$ folgt. Wegen EA

folgt die Existenz eines Elementes e_1 mit $\frac{ee_1c}{e_1c}$, woraus $e_1 = e$ wegen lU folgt.

Also gilt $\frac{ee}{e}$. Wegen $rEli(e)$ gibt es zu jedem Element a von (R) ein Element a' mit $\frac{eaa'}{e}$, woraus die Existenz eines Elementes a_1 mit $\frac{eaa_1}{a_1e}$ folgt. Wegen lU

folgt $a_1 = a$, also $\frac{ea}{a}$, d. h. $lI(e)$. Wegen $rEII(e)$ gibt es zu a' auch ein Element a_1 mit $\frac{a'e a_1}{e}$, woraus die Existenz eines Elementes a'_1 mit $\frac{a'e a'_1}{a'_1e}$ folgt.

Wegen lU folgt $a'_1 = a'$, also $\frac{a'e}{a'}$. Hieraus folgt jetzt $\frac{a'a a'}{a'}$, woraus die

Existenz eines Elementes e_1 mit $\frac{a'a e_1}{a'}$ folgt. Wieder wegen lU folgt $e_1 = e$,

also $\frac{a'a}{e}$, d. h. $lEII(e)$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 6. Juni 1942.)

Die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix.

Von

Edwin Wagner.

Inhalt. Aus den Elementarteilern einer vorgegebenen quadratischen Matrix, deren Elemente einem kommutativen Körper K angehören, werden die Elementarteiler eines Polynoms in dieser Matrix mit Koeffizienten aus K berechnet. Dies gelingt, indem eine Zerlegung des Vektorraumes in eine direkte Summe von unzerlegbaren A -Zyklen zu einer solchen von unzerlegbaren $f(A)$ -Zyklen nach der von G. KOWALEWSKI (Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, Bd. 68, 1916) dargelegten Methode verfeinert wird. Folgerungen über die Lösungen der Matrizen Gleichung $f(x) = A$.

1. Die quadratische Matrix $A = (a_{ik})$, deren Elemente a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, 0$) einem kommutativen Körper K der Charakteristik 0 angehören, habe die Elementarteiler $a_1(t), a_2(t), \dots, a_i(t)$ sei zerlegt in ein Produkt von teilerfremden Potenzen von in K irreduziblen Polynomen

$$(1) \quad a_i(t) = \prod_k a_{ik}^{n_{ik}}(t).$$

Die $a_i(t)$ seien „normiert“, d. h. ihr höchster Koeffizient sei das Einselement von K . Die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ der Vektoren $(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_0)$, ξ_i aus K , läßt sich dann in eine direkte Summe von unzerlegbaren A -Zyklen $\mathfrak{A}_{ik}$ zerlegen:

$$(2) \quad \mathfrak{A} = \sum_{i,k} \mathfrak{A}_{ik}.$$

Unter einem A -Zyklus ist dabei eine Gesamtheit aller Vektoren (ξ) gemeint, die aus einem Grundvektor (ϱ) durch Transformation mit allen Polynomen $p(A)$ von A entstehen:

$$(\xi) = p(A) \cdot (\varrho).$$

In einem der Zerfällung (2) angepaßten Koordinatensystem ist die Matrix A direkte Summe von Matrizen A_{ik} . A_{ik} transformiert $\mathfrak{A}_{ik}$ in sich und genügt der Gleichung

$$(3) \quad a_{ik}^{n_{ik}}(A_{ik}) = 0$$

und $a_{ik}^{n_{ik}}(t)$ ist das niedrigste Polynom mit Koeffizienten aus K , das die Gleichung (3) erfüllt. Mit W. KRULL wollen wir das Polynom $a_{ik}^{n_{ik}}(t)$ die Ordnung der Matrix A_{ik} und des zugehörigen Teilraumes $\mathfrak{A}_{ik}$ nennen.

Ist nun $B = f(A)$ ein vorgegebenes Polynom in A mit Koeffizienten aus K , so ist in dem angepaßten Koordinatensystem auch B direkte Summe

von Matrizen B_{ik} gleichen Grades wie die A_{ik} , die ebenfalls $\mathfrak{A}_{ik}$ in sich transformieren. Wir gewinnen die Bausteine für eine Zerlegung der Elementarteiler der Matrix B nach Gleichung (1) in den Ordnungen der unzerlegbaren B -Zyklen, in die sich die $\mathfrak{A}_{ik}$ zerlegen lassen.

2. Es sei also $\mathfrak{A}$ irgendein unzerlegbarer A -Zyklus mit dem Grundelement (ϱ) und $a^n(t)$ seine Ordnung bezüglich A ; $a(t)$ ist in $\mathbf{K}$ irreduzibel. Ist $g(T)$ die Ordnung von $\mathfrak{A}$ bezüglich B , also $g(T)$ das niedrigste normierte Polynom, welches in $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$(4) \quad g(B) = 0$$

erfüllt, so gilt wegen

$$(4') \quad g(f(A)) = 0$$

die Beziehung

$$(5) \quad g(f(t)) \equiv 0 \pmod{a^n(t)}.$$

Umgekehrt genügt jedes Polynom, welches (5) erfüllt, ebenfalls der Gleichung (4), da in $\mathfrak{A}$

$$(3') \quad a^n(A) = 0.$$

$g(T)$ ist also das (immer existierende und, wie sich zeigen wird, eindeutig bestimmte) normierte Polynom niedrigsten Grades, welches die Kongruenz (5) erfüllt. Über die Lösungen von (5) ziehen wir den folgenden elementar zu beweisenden Hilfssatz an:

1. Hilfssatz. *Das normierte Polynom $b(T)$ niedrigsten Grades, welches die Gleichung*

$$b(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}$$

erfüllt, ist eindeutig bestimmt und in $\mathbf{K}$ irreduzibel, und jede andere Lösung hat $b(T)$ zum Teiler. Es sei

$$(6) \quad b(f(t)) = a^s(t) \cdot q(t)$$

und $q(t)$ nicht mehr durch $a(t)$ teilbar. Das niedrigste Polynom $g_i(T)$, welches die Gleichung

$$g_i(f(t)) \equiv 0 \pmod{a^i(t)}$$

erfüllt, ist

$$(7) \quad g_i(T) = b^{r_i}(T),$$

wo r_i durch die Ungleichung

$$(8) \quad i \leq s \cdot r_i < i + s$$

eindeutig bestimmt ist.

Der Beweis stützt sich nur auf die im Polynomring $K[t]$ immer mögliche Division durch normierte Polynome und die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Polynoms $F(t)$ in Primfaktoren und kann hier übergangen werden.

Es könnte hier noch eine Betrachtung über den Grad von $b(T)$ angeschlossen werden, aber der bezügliche Satz wird sich im folgenden von selbst ergeben.

Aus dem ersten Hilfssatz folgern wir den

2. Hilfssatz. a) Die Matrix $B = f(A)$ ist in $\mathfrak{A}$ dann und nur dann singulär, wenn $f(t)$ teilbar durch $a(t)$.

b) Ist $f(t)$ nicht teilbar durch $a(t)$, so gibt es ein Polynom $f'(t)$ derart, daß $f(A) \cdot f'(A) = E$ (= Einheitsmatrix).

c) Die Ordnung eines B -Zyklus, der vom Grundvektor $(\xi) = a^i(A) \cdot p(A) \cdot (\varrho)$ erzeugt wird, ist $b^{m_i}(T)$, wobei $n - i \leq s \cdot m_i < n - i + s$, wenn $p(t)$ nicht mehr durch $a(t)$ teilbar ist.

Der elementare Beweis kann übergangen werden.

3. Nun wollen wir die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ durchführen! Wir gehen in der Reihe der Potenzen

$$(9) \quad t, t^2, t^3, \dots, t^N \quad (N = \text{Grad von } a(t))$$

bis zu jener Potenz t^M , die als erste folgende Eigenschaft besitzt: Es gibt $M + 1$ Polynome $u_i(T)$ derart, daß

$$(10) \quad u_0(f(t)) + t \cdot u_1(f(t)) + t^2 \cdot u_2(f(t)) + \dots + t^M \cdot u_M(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)},$$

ohne daß sämtliche $u_i(T)$ durch $b(T)$ teilbar sind, während die Kongruenz

$$(11) \quad v_0(f(t)) + t \cdot v_1(f(t)) + t^2 \cdot v_2(f(t)) + \dots + t^{M-1} \cdot v_{M-1}(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}$$

stets die M Kongruenzen

$$(12) \quad v_i(T) \equiv 0 \pmod{b(T)}$$

nach sich zieht. Spätestens die Potenz N erfüllt diese Bedingung und aus

$$u_0(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}$$

folgt nach Hilfssatz 1 stets

$$u_0(T) \equiv 0 \pmod{b(T)}.$$

Nun beweisen wir zwei wichtige Hilfssätze:

3. Hilfssatz. Die Summe der von den Vektoren

$$(13) \quad (\varrho), A \cdot (\varrho), \dots, A^{M-1} \cdot (\varrho), a(A) \cdot (\varrho),$$

$A \cdot a(A) \cdot (\varrho), \dots, A^{M-1} \cdot a(A) \cdot (\varrho), \dots, a^{s-1}(A) \cdot (\varrho), \dots, A^{M-1} \cdot a^{s-1}(A) \cdot (\varrho)$ erzeugten B -Zyklen ist der gesamte A -Zyklus $\mathfrak{A} \cdot \sigma =$ die kleinere von s, n .

4. Hilfssatz. Die von den Vektoren (13) erzeugten B -Zyklen sind untereinander vektorfremd; die Summe des Hilfssatzes 3 ist daher eine direkte Summe.

Beweis zu 3. Wäre in Gleichung (10) $u_M(T) \equiv 0 \pmod{b(T)}$, so wäre Gleichung (11) und mithin auch Gleichung (12) erfüllt, also alle $u_i(T)$ durch $b(T)$ teilbar gegen die Voraussetzung. Es ist daher $u_M(T) \not\equiv 0 \pmod{b(T)}$. Wir multiplizieren (10) mit dem nach dem 2. Hilfssatz b) existierenden Polynom $u'_M(T)$ und einer beliebigen Potenz $a^c(t)$, $0 \leq c < \sigma$ und t^p , $0 \leq p < N - M$ und erhalten nach Einsetzung von A für t eine Gleichung für $A^{M+p} \cdot a^c(A)$:

$$(14) \quad A^{M+p} \cdot a^c(A) = F(A) \cdot a^{c+1}(A) \cdot u'_M(B) - \\ - u_0(B) \cdot u'_M(B) \cdot A^p \cdot a^c(A) - \dots - u_{M-1}(B) \cdot u'_M(B) \cdot A^{M+p-1} \cdot a^c(A).$$

Auf den Vektor (ρ) angewendet gibt (14) eine in p und c laufende Rekursionsformel, welche gestattet, alle Vektoren des A -Zyklus $\mathfrak{A}$ von der Gestalt $A^i \cdot a^c(A) \cdot (\rho)$ und ihre Linearkombinationen mit Polynomen $w(A)$ als Koeffizienten durch Vektoren der B -Zyklen des 3. Hilfssatzes sowie der B -Zyklen von Vektoren der Form

$$(15) \quad A^i \cdot a^R(A) \cdot (\rho) \quad R \geq \sigma$$

linear auszudrücken.

Im Falle $\sigma = n$ ist damit alles bewiesen, da die Vektoren der Form (15) und damit auch alle noch nicht erfaßten Vektoren, die sich ja durch jene und die bereits erfaßten linear ausdrücken lassen, nach (3') verschwinden.

Im Falle $\sigma = s$ behandeln wir die Vektoren der Form (15) (und damit auch die noch nicht erfaßten) folgendermaßen weiter: Sei

$$R = k \cdot s + c_1 \quad c_1 < s;$$

Gleichung (6) gibt, mit dem Polynom $q'(t)$ (Hilfssatz 3b) multipliziert und zur Potenz k erhoben,

$$(6') \quad a^{ks}(t) = b^k(f(t)) \cdot q'^k(t),$$

somit

$$(16) \quad A^i \cdot a^R(A) = A^i \cdot b^k(B) \cdot q'^k(A) \cdot a^{c_1}(A) \quad c_1 < s.$$

Wendet man auf die Vektoren (15) die Gleichung (16) an, so erhält man auf der rechten Seite wieder einige Vektoren, auf die man die Formel (15) anwenden muß, was wieder Vektoren aus B -Zyklen mit Grundvektoren der Form (16) erzeugt usw. Da aber bei jedem Schritt vermöge (16) zu den neu hinzukommenden Vektoren auch immer ein Faktor $b^k(B)$ hinzutritt, muß das Verfahren nach d Schritten enden, sobald $skd \geq n$, weil dann nach (6) $b^{kd}(B) = a^{skd}(A) \cdot q'^{kd}(A)$, was nach (3') verschwindet.

Beweis zu 4. Es braucht nur gezeigt zu werden, daß die Gleichung

$$(17) \quad \sum_{i=0}^{\sigma-1} U_i(A, B) \cdot (\varrho) = 0$$

mit

$$U_i = \sum_{k=0}^{M-1} u_{ik}(B) \cdot a^i(A) \cdot A^k$$

nur bestehen kann, wenn einzeln

$$u_{ik}(B) \cdot a^i(A) \cdot A^k \cdot (\varrho) = 0.$$

Angenommen, (17) würde bestehen, aber

$$U_{i_1} \cdot (\varrho) + U_{i_2} \cdot (\varrho) + \dots \neq 0,$$

während die übrigen $U_i \cdot (\varrho)$ verschwinden. (17) wäre gleichwertig der Kongruenz

$$(17') \quad U_{i_1}(t, f(t)) + U_{i_2}(t, f(t)) + \dots \equiv 0 \pmod{a^n(t)}.$$

Es sei

$$(18) \quad U_{i_l}(t, f(t)) = a^{n_{i_l}}(t) \cdot U_{i_l}^*(t) \cdot a^{i_l}(t)$$

und $U_{i_l}^*(t)$ nicht mehr durch $a(t)$ teilbar.

Nach Voraussetzung [siehe (11) und (12)] ist (18) nur so möglich, daß jedes $u_{i_l, k}(T)$ teilbar ist durch eine geeignete Potenz $b^{m_{i_l}}(T)$. Dann ist in (18)

$$n_{i_l} = s \cdot m_{i_l}$$

und $n_{i_l} + i_l \neq n_{i_k} + i_k$, wenn $l \neq k$, weil dann $i_l - i_k \not\equiv 0 \pmod{s}$.

Unter den Summen

$$n_{i_l} + i_l \quad l = 1, 2, \dots$$

gibt es eine kleinste

$$n_h + h < n$$

und die Kongruenz (17') ist nur möglich, wenn $U_h^*(t)$ noch durch $a(t)$ teilbar ist, gegen die Voraussetzung.

Damit sind beide Hilfssätze bewiesen.

Der A -Zyklus $\mathfrak{A}$ ist in eine direkte Summe von B -Zyklen zerlegt, die selbst unzerlegbar sind, da sie Potenzen irreduzibler Polynome zu Ordnungen haben.

4. Nach Hilfssatz 2c) ist die Ordnung des vom Vektor $A^k \cdot a^i(A) \cdot (\varrho)$ erzeugten B -Zyklus gleich $b^{m_i}(T)$, wo

$$(19) \quad \frac{n-i}{s} \leq m_i < \frac{n-i}{s} + 1 \quad \left(\begin{array}{l} i = 0, 1, \dots, \sigma-1, \\ k = 0, 1, \dots, M-1. \end{array} \right)$$

Bezeichnen wir mit P jene der Zahlen $n, n-1, n-2, \dots, n-\sigma+1$, welche durch σ teilbar ist, und mit Q den Quotienten $\frac{P}{\sigma}$, so ist

$$(19') \quad \begin{aligned} m_i &= Q + 1, & \text{wenn } n-i > P, \\ m_i &= Q, & \text{wenn } n-i \leq P. \end{aligned}$$

Es kommt daher der Exponent $Q \cdot M(\sigma - n + P)$ -mal und der Exponent $Q + 1 \cdot M(n - P)$ -mal vor. Für die Dimension von $\mathfrak{A}$ ergibt sich die Zahl $M \cdot n \cdot N_1$, wenn N_1 der Grad von $b(T)$ ist. Da sie andererseits gleich $n \cdot N$ ist, muß N_1 Teiler von N sein:

$$(20) \quad N_1 = \frac{N}{M}.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Potenzen $a_{ik}^{n_{ik}}(t)$ der Faktorzerlegung (1) der Elementarteiler als die *Primpotenzen* der Matrix, so können wir unser Ergebnis in dem folgenden *Hauptsatz* aussprechen:

Jede Primpotenz $a^n(t)$ der Matrix A erzeugt Primpotenzen $b^m(T)$ des Polynoms $B = f(A)$. Dabei bedeutet $b(T)$ das eindeutig bestimmte „normierte“ irreduzible Polynom niedrigsten Grades, welches die Kongruenz $b(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}$ erfüllt; sein Grad N_1 ist Teiler des Grades N von $a(t)$. Von den Exponenten m sind $\frac{N}{N_1}(\sigma - n + P)$ gleich $\frac{P}{\sigma}$ und $\frac{N}{N_1}(n - P)$ gleich $\frac{P}{\sigma} + 1$, wenn σ die kleinere der Zahlen n und $s = \text{Vielfachheit des Faktors } a(t) \text{ in der Primfaktorzerlegung von } b(f(t))$ bedeutet und P jene der Zahlen $n, n-1, \dots, n-\sigma+1$, welche σ zum Teiler hat.

Die Exponenten m sind nach (19') dann und nur dann alle untereinander gleich, wenn $P = n$, also n durch σ teilbar ist, und zwar $m = 1$, wenn $n = \sigma$ und $m = k$, wenn $n = k \cdot \sigma$.

Besonders einfache Verhältnisse liegen vor, wenn der Körper K algebraisch abgeschlossen ist. Dann ist $a(t)$ und daher auch $b(t)$ linear, also

$$N = N_1 = M = 1, \quad a(t) = t - \alpha, \quad b(T) = T - \beta$$

und Gleichung (6) nimmt folgende Gestalt an:

$$f(t) - \beta = (t - \alpha)^s \cdot q(t) \quad q(\alpha) \neq 0.$$

Es ist daher $\beta = f(\alpha)$ und s die Vielfachheit der Wurzel α der Gleichung

$$f(t) - f(\alpha) = 0.$$

5. Der Hauptsatz erlaubt eine einfache Lösung einiger alter Fragen:

1. Satz. Die Matrix A ist dann und nur dann ihrerseits wieder Polynom in der Matrix $B = f(A)$, wenn $a)$ die niedrigste (in K irreduzible) Lösung $b(T)$ der Kongruenz $b(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}$ den gleichen Grad hat wie $a(t)$ und keine Lösung der Kongruenz $b(f(t)) \equiv 0 \pmod{a^2(t)}$ ist, wenn $n > 1$, und

b) zu zwei verschiedenen Polynomen $a(t)$ auch zwei verschiedene, also teilerfremde Lösungen $b(T)$ gehören.

Beweis. Da beim Übergang von A zu $B = f(A)$ die Zahl der unzerlegbaren Zyklen nie abnimmt und die Zahl der verschiedenen Primpotenzbasen $a(t)$ nie zunimmt, müssen — soll auch $A = F(B)$ sein — diese Zahlen für beide Matrizen übereinstimmen; für die erste Zahl garantiert das die Bedingung a), für die zweite die Bedingung b).

Sind umgekehrt beide Bedingungen erfüllt, so folgt aus a) zunächst die Existenz einer Funktion $F_a(T)$ so, daß $A = F_a(B)$ im größten A -Zyklus $\mathfrak{A}$, der zur Basis $a(t)$ gehört. Da diese in $\mathfrak{A}$ gültige Gleichung gleichwertig ist der Kongruenz

$$(21) \quad F_a(B) \equiv A \pmod{a^n(A)},$$

gilt sie auch in den übrigen A -Zyklen, die zur gleichen Basis $a(t)$ gehören. Da der A -Zyklus $\mathfrak{A}$ vermöge a) auch größter B -Zyklus ist, kann (21) auch in der Form

$$(21') \quad F_a(B) \equiv A \pmod{b^m(B)}$$

geschrieben werden. Da die $b(T)$ zu den verschiedenen $a(t)$ nach b) paarweise teilerfremd sind, gibt es eine Funktion $F(T)$ so, daß $F(T) \equiv F_a(T) \pmod{b^m(T)}$ für alle verschiedenen Paare $a(t)$, $b(T)$ und es ist in jedem Zyklus und damit im ganzen Vektorraum $A = F(B)$.

Zweitens erlaubt der Hauptsatz einen Überblick über die Lösungen einer Matrixgleichung der Form

$$(22) \quad f(X) = A,$$

wo A eine gegebene Matrix mit Elementen aus K , X eine gesuchte Matrix gleicher Art und $f(t)$ ein gegebenes Polynom mit Koeffizienten aus K bedeuten.

Um (22) zu lösen, verschaffen wir uns zunächst eine Matrix Y derart, daß $f(Y)$ zu A ähnlich wird:

$$(23) \quad f(Y) = T A T^{-1}.$$

Dann ist $X_0 = T^{-1} Y T$ eine Lösung von (22) und jede Lösung von (22) kann so gewonnen werden.

Die Lösungen Y von (23) verschaffen wir uns auf Grund des Hauptsatzes auf die folgende Weise:

Sei $a(t)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade N , das als Basis von Primpotenzen von A mit den Exponenten $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s$ vorkommt. Wir zerlegen $a(f(t))$ in ein Produkt von teilerfremden Potenzen irreduzibler Polynome:

$$(24) \quad a(f(t)) = b^{r_1}(t) \cdot b_2^{r_2}(t) \cdot \dots \cdot b_2^{r_l}(t).$$

Der Grad von $b_i(t)$ sei N_i ; nach dem Hauptsatz ist jedes N_i ganzzahliges Vielfaches von N . Nun teilen wir die n_i in Gruppen folgender Art ein:

I. Gibt es unter den n_i solche, die gleich 1 sind, so fassen wir einige von ihnen in Gruppen $\mathfrak{G}_j$ zu M_j Gliedern so zusammen, daß die M_j eine der Gleichungen

$$M_j = \frac{N_k}{N} \cdot m_j \quad \text{mit } 0 < m_j \leq r_k,$$

sonst beliebig ganzzahlig, erfüllen. $k = 1, 2, \dots, l$.

II. Die restlichen n_i teilen wir in Gruppen folgender Art ein:

a) Jede Gruppe enthält $z = r_k \cdot \frac{N_k}{N}$ aufeinander folgende n_i — mit einem beliebigen (von Gruppe zu Gruppe verschiedenen oder auch gleichen) $k = 1, 2, \dots, l$.

b) Jede Gruppe enthält entweder lauter gleiche Glieder, oder es sind die ersten $p \cdot \frac{N_k}{N}$ untereinander gleich und die restlichen $z - p \cdot \frac{N_k}{N}$ ebenfalls untereinander gleich und um 1 kleiner als die ersten $p \cdot \frac{N_k}{N}$ (mit einem beliebigen ganzzahligen $p < r_k$).

2. Satz. a) Ist eine Einteilung der Primpotenzen von A in Gruppen nach I. und II. nicht möglich, so ist die Gleichung (23) und um so mehr die Gleichung (22) in K unlösbar.

b) Jede mögliche Einteilung nach I. und II. liefert die folgende Klasse von ähnlichen Lösungen Y der Gleichung (23): Jeder Gruppe wird die Primpotenz $b_k^m(T)$ zugeordnet, wo m den Quotient der Division

$$(\text{Summe aller in der Gruppe enthaltenen } n_i) : \left(\frac{N_k}{N}\right)$$

bedeutet. Bei Berücksichtigung aller Primpotenzen von A erhält man so alle Primpotenzen einer Klasse von ähnlichen Lösungen Y von (23) und alle Lösungen Y von (23) können auf diese Weise erhalten werden.

Der Beweis ergibt sich einfach durch Umkehrung des Hauptsatzes. Jede Primpotenz $b_k^m(T)$ von Y erzeugt Primpotenzen $a^{n_i}(t)$ von A mit allen n_i der zugeordneten Gruppe als Exponenten.

Satz 2 ermöglicht die Entscheidung über die Lösbarkeit der Gleichung (22) und die Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Klassen von Lösungen allein durch Untersuchung der Elementarteiler von A . Die Verhältnisse vereinfachen sich, wenn der Körper K algebraisch abgeschlossen ist; dieser Spezialfall wurde bereits eingehend untersucht¹⁾. Einen tieferen Einblick in die Lösungsmannigfaltigkeit von (22) kann natürlich die Betrachtung der

¹⁾ P. FRANKLIN, J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 10 (1932); D. E. RUTHERFORD, Proc. Edinburgh Math. Soc. II 3 (1932).

Elementarteiler allein nicht geben, da die Eigenschaft einer Matrix X , Lösung von (22) zu sein, von höheren Invarianten des Paares X, A abhängt. Diese Frage soll gelegentlich von anderen Gesichtspunkten aus behandelt werden.

Eine vollständige Lösung gestattet hingegen die Frage, nach jenen Lösungen von (22), die ihrerseits Polynome in A sind. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß stets zwei ähnliche Lösungen X_0 und $P^{-1}X_0P$ identisch sind, weil jede mit A vertauschbare Matrix P auch mit allen Polynomen in A vertauschbar ist. Jede Lösung Y von (23) liefert in diesem Falle also nur *eine* Lösung X von (22).

Die Bedingungen, denen Y genügen muß, damit X Polynom in A sei, liefert uns Satz 1:

1) In der Zerlegung (24) muß es solche $b_i(t)$ geben, deren Grad gleich N ist. Nur diese dürfen bei der Konstruktion der Y nach Satz 2 verwendet werden [Satz 1, Bedingung a), erster Teil].

2) Aus der Zerlegung (24) darf bei Konstruktion derselben Matrix Y nur *eines* der b_i verwendet werden (Bedingung b).

3) Jede Gruppe I und II darf nur ein Element enthalten (wegen der Gleichheit der Anzahl der Zyklen).

4) Jedes der Bedingung 1) genügende b_i , das in (24) mit einem Exponenten $r_i > 1$ auftritt, darf nur einem $n_i = 1$ zugeordnet werden [Bedingung a), zweiter Teil]; gibt es also zu $a(t)$ Exponenten $n_i > 1$, so dürfen nach 2) überhaupt nur jene $b_i(t)$ verwendet werden, deren $r_i = 1$.

3. Satz. a) Die Gleichung (22) hat dann und nur dann Lösungen X , die Polynome von A sind, wenn die Zerlegung (24) ein $b_i(t)$ enthält, dessen Grad dem Grad N von $a(t)$ gleich, und dessen Exponent r_i überdies gleich 1 ist, wenn zu $a(t)$ auch Primpotenzen von A mit höheren Exponenten als 1 gehören.

b) Ist $z_a =$ Zahl derjenigen der b_i der Zerlegung (24), deren Grad gleich N ist, wenn zu $a(t)$ nur Primpotenzen mit dem Exponenten 1 gehören, und $z_a =$ Zahl der b_i vom Grade N , die den Exponenten $r_i = 1$ tragen, wenn zu $a(t)$ auch Primpotenzen mit höheren Exponenten als 1 gehören, so ist die Zahl der Lösungen X von (22), die Polynome in A sind, gleich $\prod_a z_a$. Das Produkt ist dabei über alle verschiedenen Primpotenzbasen $a(t)$ von A zu nehmen.

Satz 3 ist die sinngemäße Erweiterung des Satzes von W. E. ROTH²⁾ auf den Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen Körpers K .

Ein in der Literatur eingehend behandelter Spezialfall der Gleichung (22) ist die Gleichung

$$(25) \quad X^m = A,$$

²⁾ Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928).

wo m eine natürliche Zahl bedeutet. A sei zunächst regulär vorausgesetzt. In algebraisch abgeschlossenen Körpern ist (25) stets lösbar und die Lösungen stehen zu A in einer einfachen Beziehung³⁾. Ist K aber nicht abgeschlossen, so trifft das nicht mehr zu:

Die Vereinfachung der Fragestellung gegenüber der allgemeinen Gleichung (22) liegt darin, daß in (24) alle $r_k = 1$ [da $a(t^m)$ in einem passenden Erweiterungskörper in lauter verschiedene Linearfaktoren zerfallen muß; die Charakteristik von K wurde gleich 0 vorausgesetzt].

In allen solchen Fällen ($r_k = 1$) enthalten die Gruppen I und II des Satzes 2 lauter gleiche n_i . Es seien also

$$n'_1 > n'_2 > \dots > n'_s,$$

alle verschiedenen zu $a(t)$ gehörigen n_i und n'_k kommen z_k -mal vor; der Grad von b_i sei $N_i = M_i \cdot N$. Die Gruppen müssen dann je M_i ($i = 1, 2, \dots, l$) Glieder enthalten und jeder Gruppe mit M_i Gliedern n'_k wird die Primpotenz $b_i^{n'_k}(t)$ zugeordnet. Aus Satz 2 folgt also unmittelbar

4. Satz. Sind die Exponenten r_k der Zerlegung (24) alle gleich 1, so ist die Gleichung (22) dann und nur dann lösbar, wenn die Vielfachheit z_k der Primpotenz $a_k^{n'_k}(t)$ eine Zerlegung nach der Gleichung

(26) $z_k = p_1^{(k)} \cdot M_1 + p_2^{(k)} \cdot M_2 + \dots + p_l^{(k)} \cdot M_l$, $p_i^{(k)}$ positiv ganz oder Null, gestattet. Ist Z_k die Anzahl der möglichen Zerlegungen (26), so läßt (22)

$\prod_{a=1}^{s'} (\prod_{k=1}^l Z_k)$ verschiedene Lösungsklassen zu.

Die Untersuchung der verschiedenen Lösungen, die zur gleichen Klasse gehören, fällt aus dem Rahmen dieser Arbeit. Nur die folgende Tatsache soll festgehalten werden:

5. Hilfssatz. Durch gleichzeitige Transformation mit derselben Matrix T

$$A^* = T A T^{-1}, \quad X^* = T X T^{-1}$$

kann erreicht werden, daß A in eine der Zerfällung (2) angepaßte Normalform A^* und die beliebige Lösung X in eine Matrix der Form X^* übergeht:

$$A^* = \underbrace{A_1^{(n)} + \dots + A_1^{(a)}}_{p_1^{(1)} \cdot M_1} + \underbrace{A_2^{(a)} + \dots + A_2^{(n)}}_{p_1^{(2)} \cdot M_1} + \dots + \underbrace{A_1^{(a)} + \dots + A_1^{(a)}}_{p_2^{(1)} \cdot M_2} + \dots$$

$$X^* = \underbrace{X_1^{(a)(1)} + \dots + X_1^{(a)(1)}}_{p_1^{(1)}} + \underbrace{X_1^{(a)(2)} + \dots + X_1^{(a)(2)}}_{p_1^{(2)}} + \dots + \underbrace{X_2^{(a)(1)} + \dots + X_2^{(a)(1)}}_{p_2^{(1)}} + \dots$$

³⁾ Siehe R. WEITZENBÖCK, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 35 (1932), S. 157–161.

$A_i^{(a)}$ ist eine zur Primpotenz $a^{n'_i}(t)$ gehörige Normalform (z. B. eine „Begleitmatrix“) von $N \cdot n'_i$ Zeilen und Spalten ($N = \text{Grad von } a(t)$) und $X_k^{(a)(t)}$ eine Matrix von $M_k \cdot N \cdot n'_i$ Zeilen und Spalten mit dem einzigen Elementarteiler $b_k^{n'_i}(t)$.

Beweis. Die in Satz 2 angegebene Konstruktion liefert ein Y , das bereits nach Art des X^* zerfällt, was für $f(Y)$ dieselbe Zerfällung bedingt. Die Transformation von $f(Y)$ in A^* kann durch ein in gleicher Weise zerfallendes T bewerkstelligt werden, wodurch Y in das gewünschte X^* übergeht.

Auch in allen anderen Fällen der Gleichung (22) gelten entsprechende Sätze. Aus Satz 3 folgt:

5. Satz. Die Zahl der m -ten Wurzeln aus einer regulären Matrix A , die als Polynome in A dargestellt werden können, ist $\prod_a z_a$, wenn z_a die Anzahl der verschiedenen Primteiler N -ten Grades von $a(t^m)$ bedeutet ($N = \text{Grad von } a(t)$).

Zur Behandlung der Primpotenzen $a^n(t) = t^n$ sei auf die angeführte Arbeit von WEITZENBÖCK verwiesen; bei linearen Primpotenzbasen kommt man mit den dort entwickelten Methoden aus. — Herrn Prof. Dr. GERHARD KOWALEWSKI bin ich für freundliche Durchsicht eines Manuskriptes zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 2. September 1942.)

Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. I.

Von

J. Horn in Darmstadt.

§ 1.

Das System linearer Differentialgleichungen

$$(A) \quad x^{-1} \frac{dy_\alpha}{dx} + \alpha_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^m Q_{\alpha\beta}(x) y_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

dessen Koeffizienten

$$Q_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, m)$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär sind, hat die *Unbestimmtheitsstelle* $x = \infty$ vom Rang 2¹⁾. Es wird durch (im allgemeinen divergente) Reihen

$$y_\alpha = e^{-\frac{a_1 x^2}{2} - a_{11}^{(1)} x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt, wenn $a_2, \dots, a_m$ von a_1 verschieden sind. Durch die Substitution

$$y_\alpha = e^{-\frac{a_1 x^2}{2} - a_{11}^{(1)} x} z_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

erhält man, wenn statt z_α wieder y_α geschrieben wird, ein *Differentialgleichungssystem* (A_1), in welchem $a_1 = 0$, $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_2 \neq 0$, $\dots$, $a_m \neq 0$ ist und welches durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

mit $A_{20} = \dots = A_{m0} = 0$ formal befriedigt wird. Der Realteil von

$$r = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=2}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma}$$

wird positiv angenommen, was nötigenfalls durch eine Substitution $y_\alpha = x^r z_\alpha$ erreicht wird.

1) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Vereinigung 24 (1915), S. 310–312.

Das Differentialgleichungssystem (A_1) wird durch LAPLACESche Integrale

$$(1) \quad y_\alpha = \int_0^\infty (w_\alpha^{(0)}(t) + x w_\alpha^{(1)}(t)) e^{-tx^2} dt^2 \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

sowie auch durch LAPLACESche Integrale

$$(2) \quad y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx^2} dt^3 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

befriedigt.

Hier soll gezeigt werden, daß man bisweilen auch LAPLACESche Integrale

$$(3) \quad y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

von der von POINCARÉ⁴⁾ im Falle einer Unbestimmtheitsstelle vom Rang 1 benutzten Form verwenden kann. Die Bedingungen dafür werden hier ermittelt.

Es ist, wenn y_α das LAPLACESche Integral (3) bedeutet,

$$\begin{aligned} \frac{dy_\alpha}{dx} &= - \int_0^\infty t w_\alpha(t) e^{-tx} dt, \\ x^{-1} \frac{dy_\alpha}{dx} &= - \int_0^\infty \int_0^t \tau w_\alpha(\tau) d\tau \cdot e^{-tx} dt \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tx} \int_0^t \tau w_\alpha(\tau) d\tau = 0.$$

Man erhält also die Integralgleichungen

$$- \int_0^t \tau w_\alpha(\tau) d\tau + a_\alpha w_\alpha(t) + \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

unter Einführung der ganzen Funktionen

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!};$$

dabei ist $G_{\alpha\beta}(0) = a_{\alpha\beta}^{(1)}$ und $G_{11}(0) = a_{11}^{(1)} = 0$.

²⁾ Jahresber. 24 (1915), S. 312f.

³⁾ Jahresber. 25 (1916/17), S. 301f.; Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 284–291; 8 (1920), S. 100–114.

⁴⁾ Amer. Journ. of Math. 7 (1885); Act. math. 8 (1886).

Indem wir die zu $\alpha = 1$ gehörige Integralgleichung differenzieren, geben wir den Integralgleichungen die Form

$$(B_1) \quad \begin{cases} t w_1(t) = a_{12}^{(1)} w_2(t) + \dots + a_{1m}^{(1)} w_m(t) + \\ \quad + \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G_{1\beta}'(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau, \\ a_\alpha w_\alpha(t) = \int_0^t \tau w_\alpha(\tau) d\tau - \\ \quad - \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m). \end{cases}$$

Die erste Gleichung (B_1) kann ersetzt werden durch

$$\begin{aligned} t w_1(t) &= \sum_{\beta=2}^m \frac{a_{1\beta}^{(1)}}{a_\beta} \int_0^t \tau w_\beta(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^t \left\{ G_{1\beta}'(t-\tau) - \sum_{\gamma=2}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma} G_{\gamma\beta}(t-\tau) \right\} w_\beta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Integralgleichungen (B_1) erhalten demnach die Form

$$\begin{aligned} t w_1(t) &= \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{1\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau, \\ w_\alpha(t) &= \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m), \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} f_{11}(t, \tau) &= G_{11}'(t-\tau) - \sum_{\gamma=2}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma} G_{\gamma 1}(t-\tau), \\ f_{1\beta}(t, \tau) &= \frac{a_{1\beta}^{(1)}}{a_\beta} \tau + G_{1\beta}'(t-\tau) - \sum_{\gamma=2}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_\gamma} G_{\gamma\beta}(t-\tau) \quad (\beta = 2, \dots, m), \\ f_{\alpha\alpha}(t, \tau) &= \frac{1}{a_\alpha} \tau - \frac{1}{a_\alpha} G_{\alpha\alpha}(t-\tau) \quad (\alpha = 2, \dots, m), \\ f_{\alpha\beta}(t, \tau) &= -\frac{1}{a_\alpha} G_{\alpha\beta}(t-\tau) \quad (\alpha = 2, \dots, m; \alpha \neq \beta). \end{aligned}$$

für alle endlichen t, τ regulär sind. Insbesondere ist

$$f_{11}(0, 0) = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=2}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma} = r.$$

Nach Jahresber. 24, S. 213–216 besitzen diese Integralgleichungen eine Lösung $w_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) von solcher Beschaffenheit, daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ eine ganze Funktion von t ist. Es ist

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

Wir untersuchen, wie sich die Funktionen $w_\alpha(t)$ verhalten, wenn t längs einer Geraden $\arg t = \omega$ ins Unendliche geht⁵⁾. Wir benutzen dazu gewisse aus den Integralgleichungen (B₁) hervorgehende Ungleichungen.

Die Koeffizienten $Q_{\alpha\beta}(x)$ der Differentialgleichungen (A₁) seien in der Halbebene $\Re(xe^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geq 0$ regulär. Dann bestehen Ungleichungen

$$|G_{\alpha\beta}(t)| < A e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|},$$

$$|G'_{\alpha\beta}(t)| < A' e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)|t|},$$

wo ε eine beliebig kleine positive Zahl und A, A' hinreichend große positive Konstante sind.

Aus der ersten Integralgleichung (B₁) folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}_1) \quad |t| \cdot |w_1(t)| &\leq |a_{12}^{(1)}| \cdot |w_2(t)| + \dots + |a_{1m}^{(1)}| \cdot |w_m(t)| + \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \int_0^{|t|} A' e^{\sigma(\omega)(|t| - |\tau|)} |w_\beta(\tau)| d|\tau|. \end{aligned}$$

Durch Differentiation der α -ten Integralgleichung ($\alpha = 2, \dots, m$) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dw_\alpha(t)}{dt} - \frac{t}{a_\alpha} w_\alpha(t) &= -\frac{1}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^m a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) - \\ &- \frac{1}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau \end{aligned}$$

oder, wenn $w_\alpha(t) = w_\alpha(|t|e^{i\omega})$ als Funktion von $|t|$ aufgefaßt wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_\alpha(t)}{\partial |t|} - \frac{e^{2i\omega}|t| w_\alpha(t)}{a_\alpha} &= -\frac{e^{i\omega}}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^m a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) - \\ &- \frac{e^{i\omega}}{a_\alpha} \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

⁵⁾ Vgl. Jahresber. 24, S. 217–221, 321–322.

Wir multiplizieren diese Gleichung mit der zu $w_\alpha(t)$ konjugierten Größe und beachten, daß der reelle Teil der linken Seite höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge der Glieder der rechten Seite ist. So ergibt sich

$$\mathfrak{B}_a) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial |w_\alpha(t)|^2}{\partial |t|} - |t| \cdot |w_\alpha(t)|^2 \Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} \leq \sum_{\beta=1}^m \left| \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{a_\alpha} \right| \cdot |w_\alpha(t)| \cdot |w_\beta(t)| + \\ + \frac{1}{|a_\alpha|} \sum_{\beta=1}^m \int_0^{|t|} A' e^{\sigma(\omega)(|t|-\tau)} |w_\alpha(t)| \cdot |w_\beta(\tau)| d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m).$$

Wir beweisen den folgenden Satz:

Es befinde sich $t = |t| e^{i\omega}$ in einem Sektor $\mathfrak{S}$, in welchem

$$\Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} < 0 \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

st. Die positive Größe h erfülle die Bedingung $h > \sigma(\omega)$. Dann ist, wenn die positive Konstante C hinreichend groß genommen wird,

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Es sei R eine beliebige positive Größe und C so groß, daß für $|t| \leq R$ und alle ω des Sektors $\mathfrak{S}$

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

st. Wir zeigen, daß diese Ungleichungen auch für $|t| < R$ und alle ω von $\mathfrak{S}$ gelten, wenn R hinreichend groß gewählt war.

Wäre dies nicht der Fall, so sei R' die untere Grenze derjenigen Werte von $|t|$, für welche diese Ungleichungen nicht bei allen ω von $\mathfrak{S}$ gelten. Dann sind Werte $\alpha = \alpha'$, $\omega = \omega'$ so vorhanden, daß für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$, $\alpha = \alpha'$ $|w_\alpha(t)| = C e^{h|t|}$ ist, während für $\alpha = 1, \dots, m$, für $|t| \leq R'$ und alle ω von $\mathfrak{S}$ $|w_\alpha(t)| \leq C e^{h|t|}$ ist.

Ist $\alpha' = 1$, so ergibt die Ungleichung ($\mathfrak{B}_1$) für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$

$$|t| \cdot C e^{h|t|} \leq (|a_{12}^{(1)}| + \dots + |a_{1m}^{(1)}|) C e^{h|t|} + \\ + m \int_0^{|t|} A' e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|t|-\tau)} \cdot C e^{h\tau} d\tau$$

oder nach Division mit der linken Seite

$$\mathfrak{C}_1) \quad 1 \leq \frac{|a_{12}^{(1)}| + \dots + |a_{1m}^{(1)}|}{|t|} + \frac{mA'}{(h - \sigma(\omega) - \varepsilon)|t|}.$$

Nimmt man R hinreichend groß, so ist die rechte Seite der für $|t| = R' > R$ geltenden Ungleichung kleiner als 1, so daß ein Widerspruch besteht.

Ist $\alpha = \alpha'$ eine der Zahlen $2, \dots, m$, so benutzen wir die Ungleichung $(\mathfrak{B}_\alpha)$. Für $|t| = R'$, $\omega = \omega'$ ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial |w_\alpha(t)|^2}{\partial |t|} \geq \frac{1}{2} \frac{d(C^2 e^{2h|t|})}{d|t|} = h C^2 e^{2h|t|},$$

also

$$\begin{aligned} h C^2 e^{2h|t|} - C^2 e^{2h|t|} \cdot |t| \Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} &\leq \sum_{\beta=1}^m \left| \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{a_\alpha} \right| \cdot C^2 e^{2h|t|} + \\ &+ \frac{m}{|a_\alpha|} \int_0^{|t|} A' e^{(\sigma(\omega) + \varepsilon)(|t| - |\tau|)} \cdot C^2 e^{2h|\tau|} d|\tau| \end{aligned}$$

oder nach Division mit $C^2 |t| e^{2h|t|}$

$$(\mathfrak{C}_\alpha) \quad - \Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} \leq \frac{\sum_{\beta=1}^m |a_{\alpha\beta}^{(1)}|}{|a_\alpha| \cdot |t|} + \frac{m A'}{|a_\alpha| (2h - \sigma(\omega) - \varepsilon) |t|} - \frac{h}{|t|}.$$

Nimmt man R hinreichend groß, so liegt die rechte Seite der für $|t| = R' > R$ geltenden Ungleichung beliebig nahe bei Null; wegen $\Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} < 0$ besteht also ein Widerspruch.

Wenn $c \neq 0$ eine komplexe Größe ist, ist

$$\Re \frac{1}{c} = \frac{\Re c}{|c|^2},$$

so daß $\Re c$ und $\Re \frac{1}{c}$ dasselbe Vorzeichen haben oder gleichzeitig verschwinden. Die Bedingungen

$$\Re \frac{e^{2i\omega}}{a_\alpha} < 0 \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

sind also gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$\Re (a_\alpha e^{-2i\omega}) < 0 \quad (\alpha = 2, \dots, m).$$

Wenn $a_\alpha = |a_\alpha| e^{i\varphi_\alpha}$ ($\alpha = 2, \dots, m$) ist, hat man

$$\Re (a_\alpha e^{-2i\omega}) = |a_\alpha| \Re e^{i(\varphi_\alpha - 2\omega)} = |a_\alpha| \cos (\varphi_\alpha - 2\omega),$$

so daß sich die früheren Bedingungen schreiben:

$$\cos (\varphi_\alpha - 2\omega) < 0 \quad (\alpha = 2, \dots, m).$$

Daher ist der Winkel $\varphi_\alpha - 2\omega$ ($\alpha = 2, \dots, m$) absolut genommen größer als $\frac{\pi}{2}$; der Punkt a_α ($\alpha = 2, \dots, m$) liegt also in der komplexen Zahlenebene auf der negativen Seite der auf der Geraden $\eta = \xi \operatorname{tg} 2\omega$ senkrechten Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$, d. h. auf derjenigen Seite, welche den Punkt $-e^{2i\omega}$ enthält.

Die LAPLACESchen Integrale

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-t\omega} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

genügen in dem Gebiet $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ den Differentialgleichungen (A_1) , wenn der Integrationsweg $\arg t = \omega$ die Bedingungen

$$\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leq 0 \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

erfüllt oder, was dasselbe ist, wenn die Punkte a_α ($\alpha = 2, \dots, m$) auf derselben Seite der durch den Punkt $a_1 = 0$ gehenden Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$ wie der Punkt $-e^{2i\omega}$ oder auf der Geraden selbst liegen.

Es soll gezeigt werden, daß in dem ausgesprochenen Satze die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) < 0$ ($\alpha = 2, \dots, m$) durch die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leq 0$ ($\alpha = 2, \dots, m$) ersetzt werden können.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Punkte a_α ($\alpha = 2, \dots, m$) teils auf der Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$, teils auf der negativen Seite dieser Geraden liegen. Wenn die auf dieser Geraden gelegenen Punkte a_α sämtlich auf derselben Seite des Nullpunktes liegen, so kann man durch eine beliebige kleine Änderung von ω erreichen, daß alle Punkte $a_2, \dots, a_m$ auf der negativen Seite der Geraden liegen, also $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) < 0$ ($\alpha = 2, \dots, m$) ist. Dies ist nur dann nicht möglich, wenn auf der Geraden $\xi \cos 2\omega + \eta \sin 2\omega = 0$ mindestens zwei Punkte a_α liegen, welche durch den Nullpunkt getrennt werden, was höchstens für endlich viele Werte ω eintreten kann. Ein solcher Wert sei $\omega = \omega_0$.

Wir beweisen eine Abänderung des früheren Satzes:

Es ist für $t = |t| e^{i\omega_0}$

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wenn die positiven Konstanten h und C hinreichend groß sind, vorausgesetzt, daß

$$\Re(a_\alpha e^{-2i\omega_0}) \leq 0 \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

ist.

In dem Beweis des früheren Satzes wird der Sektor $\mathfrak{S}$ durch den Strahl $\arg t = \omega_0$ ersetzt, so daß $\omega' = \omega_0$ ist; h erfüllt nicht nur die Bedingung $h > \sigma(\omega_0) = \sigma_0$, sondern überschreitet auch eine weitere unten angegebene Größe H . Ist $\alpha = \alpha'$ eine der Zahlen $2, \dots, m$ und ist $\cos(\varphi_\alpha - 2\omega_0) = 0$ oder $\Re \frac{e^{2i\omega_0}}{a_\alpha} = 0$, so schreibt sich die Ungleichung $(\mathfrak{C}_\alpha)$

$$0 \leq \frac{\sum_{\beta=1}^m |a_{\alpha\beta}^{(1)}|}{|a_\alpha|} + \frac{mA'}{|a_\alpha|(2h - \sigma_0 - \varepsilon)} - h$$

oder, wenn

$$L_\alpha = \frac{\sum_{\beta=1}^m |a_{\alpha\beta}^{(1)}|}{|a_\alpha|}, \quad M_\alpha = \frac{m A'}{2|a_\alpha|}$$

und

$$f(h) = (h - L_\alpha) \left(h - \frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2} \right) - M_\alpha$$

gesetzt wird,

$$f(h) \leq 0.$$

Die quadratische Gleichung $f(h) = 0$ hat eine Wurzel kleiner und eine Wurzel größer als $\frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}$; ihre größte Wurzel ist

$$H_\alpha = \frac{L_\alpha + \frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{L_\alpha - \frac{\sigma_0 + \varepsilon}{2}}{2} \right)^2 + M_\alpha}.$$

Wir bezeichnen mit H die größte der Größen H_α , wobei nur solche α in Betracht kommen, für welche $\cos(\varphi_\alpha - 2\omega_0) = 0$ ist. Wenn die größer als $\sigma_0 + \varepsilon$ vorausgesetzte Größe h zugleich größer als H ist, hat man

$$f(h) > 0,$$

so daß ein Widerspruch besteht.

Für $m = 2$ und $m = 3$ sind die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leq 0$ ($\alpha = 2, \dots, m$) stets erfüllbar, während es für $m \geq 4$ auf die Lage der Punkte $0, a_2, \dots, a_m$ ankommt.

Ein System von zwei oder drei Differentialgleichungen (A) mit einer Unbestimmtheitsstelle vom Rang 2 kann stets mit Hilfe von LAPLACESchen Integralen von der hier behandelten einfacheren Form (3) integriert werden.

Die einfachere Form der LAPLACESchen Integrale macht sich auch bei dem Übergang zu *Fakultätenreihen* geltend. Bei Benutzung der jetzigen Form (3) der LAPLACESchen Integrale kommt man zu ebenso einfachen Fakultätenreihen wie im Falle des Ranges 1⁶⁾, während die Form (1) der LAPLACESchen Integrale zu komplizierteren Fakultätenreihen⁷⁾ und die Form (2) zu Gammaquotientenreihen⁸⁾ statt zu Fakultätenreihen führt.

⁶⁾ Math. Ann. 71 (1911), Formel S. 522 unten ohne den Exponentialfaktor.

⁷⁾ Math. Ann. 71 (1911), Formel S. 531 oben ohne den Exponentialfaktor; Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 329 für $k = 2$.

⁸⁾ Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 112, vorletzte Formel von § 2 für $k = 2$; vgl. auch 21 (1924), S. 89 f. und 13 (1922), S. 272, Fußnote.

§ 2.

In dem Differentialgleichungssystem (A) sei jetzt $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ und $a_3, \dots, a_m$ von Null verschieden.

Wenn die Elementarteiler der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} - s, & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & , & a_{22}^{(1)} - s \end{vmatrix}$$

linear sind, können wir durch lineare Transformation von y_1, y_2 erreichen, daß $a_{12}^{(1)} = 0$, $a_{21}^{(1)} = 0$ wird. Es werden $a_{11}^{(1)}, \dots, a_{mm}^{(1)}$ durch die Substitution $y_\alpha = e^{-a_{11}^{(1)} x} z_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, m$) um $a_{11}^{(1)}$ oder durch die Substitution $y_\alpha = e^{-a_{22}^{(1)} x} z_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, m$) um $a_{22}^{(1)}$ vermindert. Wir können also in dem System (A) entweder $a_{11}^{(1)} = 0$ oder $a_{22}^{(1)} = 0$ voraussetzen.

1) Es sei $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$.

Das Differentialgleichungssystem (A), in welchem

$a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0, \dots, a_m \neq 0$, $a_{11}^{(1)} = 0$, $a_{12}^{(1)} = 0$, $a_{21}^{(1)} = 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ist, wird mit (A'_2) bezeichnet.

Das System (A'_2) wird durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

formal befriedigt. Es ist A_{10} beliebig, $A_{20} = \dots = A_{m0} = 0$ usw. Der Realteil von

$$r = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_\gamma}$$

kann positiv angenommen werden.

Die LAPLACESche Transformation⁹⁾

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

führt auf die Integralgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} t w_1(t) = \sum_{\beta=3}^m a_{1\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G'_{1\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau, \\ (t - a_{22}^{(1)}) w_2(t) = \sum_{\beta=3}^m a_{2\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G'_{2\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau, \\ a_\alpha w_\alpha(t) = \int_0^t w_\alpha(\tau) d\tau - \sum_{\beta=1}^m \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau \quad (\alpha = 3, \dots, m), \end{array} \right.$$

⁹⁾ Vgl. die Behandlung eines hierhergehörigen Beispiels Math. Ann. 111 (1935), S. 653 f.

die wir auf die Form bringen:

$$t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{1\beta}(t, \tau) w_{\beta}(\tau) d\tau,$$

$$w_{\alpha}(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_{\beta}(\tau) d\tau \quad (\alpha = 2, \dots, m)$$

dabei ist

$$f_{11}(t, \tau) = G'_{11}(t - \tau) - \sum_{\gamma=3}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)}}{a_{\gamma}} G_{\gamma 1}(t - \tau),$$

$$f_{11}(0, 0) = a_{11}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^m \frac{a_{1\gamma}^{(1)} a_{\gamma 1}^{(1)}}{a_{\gamma}} = r.$$

Wenn die Gerade, die von $t = a_{22}^{(1)}$ mit $\arg t = \arg a_{22}^{(1)}$ ins Unendliche geht, ausgeschlossen wird, wenn sonst t irgendwo im Endlichen und τ auf der Geraden $0 \dots t$ liegt, sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$) regulär. Man hat ¹⁰⁾

$$w_{\alpha}(t) = t^{r-1} p_{\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $p_{\alpha}(t)$ abgesehen von der ausgeschlossenen Geraden im Endlichen regulär ist; für $|t| < |a_{22}^{(1)}|$ ist

$$w_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Wir nehmen an, $t = |t| e^{i\omega}$ befinde sich auf der Geraden $\arg t = \omega$, wo

$$\Re(a_{\alpha} e^{-2i\omega}) < 0 \quad (\alpha = 3, \dots, m)$$

und $\omega \neq \arg a_{22}^{(1)}$ sein möge, und es sei $h > \sigma(\omega) \geq 0$, wo $\sigma(\omega)$ wie in § 1 definiert ist. Dann ist, wenn $C > 0$ hinreichend groß ist,

$$|w_{\alpha}(t)| < C e^{h|t|} \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Die LAPLACESchen Integrale

$$y_{\alpha} = \int_0^{\infty} w_{\alpha}(t) e^{-tx} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

genügen in dem Gebiet $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ den Differentialgleichungen (A'_2) , wenn der nicht durch $t = a_{22}^{(1)}$ gehende Integrationsweg $\arg t = \omega$ die Bedingungen erfüllt:

$$\Re(a_{\alpha} e^{-2i\omega}) < 0 \quad (\alpha = 3, \dots, m).$$

Im Falle $\Re(a_{\alpha} e^{-2i\omega}) = 0$ verfährt man wie am Schluß von § 1.

¹⁰⁾ Jahresber. 24, S. 213–216.

2) Es sei $a_{11}^{(1)} = 0, a_{22}^{(1)} = 0$.

Das Differentialgleichungssystem (A), in welchem $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 \neq 0, \dots, a_m \neq 0, a_{11}^{(1)} = a_{12}^{(1)} = a_{21}^{(1)} = a_{22}^{(1)} = 0$ ist, wird mit (A_2') bezeichnet.

Man hat jetzt die formalen Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

mit $A_{30} = \dots = A_{m0} = 0$. Setzt man

$$H_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^m \frac{a_{\alpha\gamma}^{(1)} a_{\gamma\beta}^{(1)}}{a_\gamma} \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

so ergibt sich $A_{10} : A_{20}$ aus

$$(H_{11} - r) A_{10} + H_{12} A_{20} = 0,$$

$$H_{21} A_{10} + (H_{22} - r) A_{20} = 0,$$

wenn r der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} H_{11} - r & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} - r \end{vmatrix} = 0$$

genügt. Diese Gleichung habe zwei verschiedene Wurzeln r_1, r_2 ohne ganzzahlige Differenz, so daß je ein Reihensystem zu $r = r_1$ und zu $r = r_2$ gehört. Ist $r = H_{11} = H_{22}, H_{12} = H_{21} = 0$, so bleiben A_{10} und A_{20} willkürlich, so daß zwei linear unabhängige Reihensysteme mit demselben r vorhanden sind.

Setzen wir wieder

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

so erhalten wir für die $w_\alpha(t)$ Integralgleichungen, welche aus den Integralgleichungen (B_2') durch Nullsetzen von $a_{22}^{(1)}$ hervorgehen:

$$(B_2'') \quad \begin{cases} t w_1(t) = \dots, \\ t w_2(t) = \dots, \\ t a_\alpha w_\alpha(t) = \dots \end{cases} \quad (\alpha = 3, \dots, m),$$

wo die rechten Seiten mit den rechten Seiten von (B_2') übereinstimmen. Die Integralgleichungen (B_2'') haben die Form

$$t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^m \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau \quad (\alpha = 3, \dots, m),$$

wo die $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) für alle endlichen t, τ regulär sind. Für $\alpha, \beta = 1, 2$ ist

$$f_{\alpha\beta}(t, \tau) = G'_{\alpha\beta}(t, \tau) - \sum_{\gamma=3}^m \frac{a_{\alpha\gamma}^{(1)}}{a_{\gamma}} G_{\gamma\beta}(t, \tau),$$

$$f_{\alpha\beta}(0, 0) = a_{\alpha\beta}^{(2)} - \sum_{\gamma=3}^m \frac{a_{\alpha\gamma}^{(1)} a_{\gamma\beta}^{(1)}}{a_{\gamma}} = H_{\alpha\beta}.$$

Wir machen von Jahresber. 24, S. 315–318 Gebrauch, wo wir $\mu = 2$ annehmen. Die Determinante

$$|f_{\alpha\beta}(0, 0) - r \delta_{\alpha\beta}| = |H_{\alpha\beta} - r \delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

besitzt, wie oben vorausgesetzt war, zwei lineare Elementarteiler $r - r_1$, $r - r_2$, und zwischen r_1 und r_2 besteht keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz. Die Realteile von r_1 und r_2 werden positiv angenommen. Die Integralgleichungen haben zwei linear unabhängige Lösungen

$$w_{\alpha}(t) = t^{r-1} p_{\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo die $p_{\alpha}(t)$ ganze transzendente Funktionen von t sind und $p_3(0) = \dots = p_m(0) = 0$ ist.

Es sind zwei Systeme LAPLACEScher Integrale

$$y_{\alpha} = \int_0^{\infty} w_{\alpha}(t) e^{-tz} dt \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

vorhanden, welche in dem Gebiet $\Re(x e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ den Differentialgleichungen (A_2'') genügen, wenn der Integrationsweg $\arg t = \omega$ die Bedingungen erfüllt:

$$\Re(a_{\alpha} e^{-2i\omega}) < 0 \quad (\alpha = 3, \dots, m).$$

Im Falle $\Re(a_{\alpha} e^{-2i\omega}) = 0$ verfährt man wie am Schluß von § 1.

Die bisherigen Betrachtungen lassen sich auf Differentialgleichungen (A) ausdehnen, für welche $a_1 = \dots = a_{\mu} = 0$ ($\mu > 2$) ist, während $a_{\mu+1}, \dots, a_m$ von Null verschieden sind ¹¹⁾.

¹¹⁾ In der Arbeit „Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen“ [Math. Ann. 111 (1935), S. 638–677] wurde die hier dargestellte Methode auf das Differentialgleichungssystem (A) auf S. 653 ($m = 3, \mu = 2$) angewandt. Für die in der Fortsetzung der genannten Arbeit [ebenda 113 (1936), S. 242–291] auf S. 245/246 behandelten Systeme (A) ist $m = 4, \mu = 3$.

Über Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen für die Figur und für ihr Spiegelbild.

Von

Heinrich Tietze in München.

Einleitung.

1. Hat man ein endliches System K von geschlossenen Raumkurven mit einer Projektionsfigur mit nur endlich vielen einfachen Überkreuzungen¹⁾, dann läßt sich bekanntlich nach der REIDEMEISTERSchen Theorie²⁾ der Projektionsfigur eine ganzzahlige quadratische Form zuordnen und die ungeraden singulären Primzahlen dieser Form³⁾ sind dann Invarianten des Kurvensystems K gegenüber Deformationen und somit charakteristisch für die betrachteten Verknötungen und Verkettungen. Von den fraglichen ungeraden Primzahlen soll dann als von den „singulären Primzahlen der Linienfigur“ selbst gesprochen werden⁴⁾. Diese topologisch invarianten Primzahlen sind dabei — hierin abweichend von der GAUSSschen Verschlingungs-Invariante⁵⁾ — unabhängig von etwaigen Orientierungen der einzelnen Linien, für die demgemäß keine Festlegung eines Durchlaufungssinnes vorgenommen wird.

Man kann mit der Untersuchung einer Linienfigur K auch die Betrachtung ihres Spiegelbildes K' verbinden, wobei dem Übergang von K zu K' die Multiplikation der zugeordneten quadratischen Form mit -1 entspricht.

¹⁾ Es sind also bei der Projektionsfigur nur Doppelpunkte zugelassen, nicht aber Punkte, in denen mehr als zwei Linienstücke einander treffen. In den Doppelpunkten soll ein Durchsetzen der beiden Linienstücke der Projektion (keine Berührung) stattfinden. Wegen Überführung von mehr als zweifachen Durchsetzungen in einfache Doppelpunkte vgl. etwa l. c.³⁾, S. 3/4, Fig. 4.

²⁾ K. REIDEMEISTER, Knotentheorie (Band 1 der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“, 1932, Kap. II, § 7, 8, S. 25ff., sowie l. c.³⁾, Kapitel III, S. 22—29.

³⁾ Diese Bezeichnung habe ich einmal zur Vereinfachung der Darstellung in einem Vortrag eingeführt (siehe „Ein Kapitel Topologie“, Hamburger Math. Einzelschriften 36, S. 21). Ich habe darin keine eigenen Ergebnisse vorgebracht, sondern nur an Hand eines Einzelproblems den neueren Stand der Knotenlehre geschildert, so daß ich im Hinblick auf eine Bemerkung im dortigen Vorwort (l. c., S. VI, Zeile 6) sagen kann: Die guten Gedanken sind von anderen, nur der Stiefel ist von mir.

⁴⁾ Vgl. l. c.¹⁴⁾, Note I, Nr. 3; ebenso auch gelegentlich l. c.³⁾, etwa S. 44, Anm. 23.

⁵⁾ l. c.²⁾, S. 17.

Von einem gewissen Interesse ist dann der Fall, daß bei diesem Übergang eine Änderung in den singulären Primzahlen eintritt, weil darin ein sehr bequemer Beweis dafür vorliegt, daß die betrachtete Figur K nicht zu den „amphicheiralen“, d. h. in ihr Spiegelbild überführbaren, gehört.

2. Gewisse nach einem besonders einfachen Prinzip auf einem Torus verlaufende Linien⁶⁾ und Liniensysteme $[m, n]$ hat vormalis — in der experimentellen Epoche der Knotenforschung — O. SIMONY eingehend studiert⁷⁾, wobei die einzelne Figur durch ein Paar ganzer Zahlen m, n , das nicht aus zwei Nullen besteht, charakterisiert wird, und wobei $[m, n]$ mit $[-m, -n]$, bzw. mit $[n, m]$ übereinstimmt bzw. topologisch äquivalent ist. Analytisch läßt sich die Figur $[m, n]$ durch

$$(1) \quad nv \equiv mu \pmod{2\pi}$$

kennzeichnen⁸⁾, wenn u, v Parameter auf der Torusfläche

$$(2) \quad r = \alpha + \beta \cos u, \quad z = \beta \sin u$$

sind, unter r, v, z Zylinderkoordinaten ($x = r \cos v, y = r \sin v$ und z cartesische Koordinaten) verstanden und unter α, β zwei positive Zahlen mit $\alpha > \beta$. Wenn keine der Zahlen m, n gleich null ist, dann unterscheidet man zwischen einem positiven oder negativen *Drehungssinn* der Figur $[m, n]$, je nachdem $mn > 0$ oder < 0 ist⁹⁾. Der größte gemeinsame Teiler t von m und n gibt dabei die Anzahl der Linien des Systems $[m, n]$ an¹⁰⁾.

⁶⁾ Diese Linien sind inzwischen als „Torusknoten“ bezeichnet und studiert worden.

⁷⁾ Vgl. l. c.¹²⁾. Über SIMONY selbst siehe außer Poggendorffs biograph.-liter. Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften Bd. III, 2. Abt., Bd. IV, 2. Abt. noch: Centralblatt für das gesamte Forstwesen, Wien, 42 (1916), S. 64–69; 44 (1918), S. 167–170; Österr. Forst- u. Jagd-Zeitung 36 (Wien 1918), S. 63 sowie l. c.³⁾, S. 44, 45.

⁸⁾ Vgl. l. c.¹³⁾, S. 54, 55.

⁹⁾ Diese Unterscheidung stellt natürlich eine Bezugnahme zum gewählten Koordinatensystem dar [während Bezugnahmen zu empirischen Unterscheidungen — rechts, links usw. — mit Geometrie als Teil der reinen — nicht angewandten — Mathematik natürlich nichts zu tun haben; vgl. zu dieser Nebenbemerkung etwa l. c.¹⁴⁾, Note I, Anm. 3, Nr. 1].

¹⁰⁾ Jede einzelne der t Linien ist dabei mit der Linie $\left[\frac{m}{t}, \frac{n}{t}\right]$ topologisch gleichwertig, d. h. in sie ohne Durchsetzungen deformierbar.

¹¹⁾ Die Fälle $m = 1$ und $m = 0$ bieten kein Interesse: es besteht $[1, n]$ bzw. $[0, n]$ aus einer einzigen unverknoteten Linie bzw. aus n unverknoteten und nicht miteinander verketteten Linien.

Wird $m = 2$ genommen¹¹⁾ — ein Fall, auf den wir uns in den vorliegenden Betrachtungen beschränken —, so erhält man die „speziellen“ SIMONY-Figuren $[2, n] = L_n$, das sind diejenigen, die SIMONY aus einem verdrehten, an den Enden zusammengeklebten Band durch Aufschneiden längs der Mittellinie des Bandes erhielt, während er im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen — unter Beschränkung auf den Fall $t = 1$ einer einzigen verknoteten Linie — die „allgemeinen“ Figuren (also die vorgenannten Torusknoten) durch geeignetes Zerschneiden von Hohlringen aus Gummi hergestellt hat¹²⁾. Nach dem Gesagten hat man es bei einer Figur L_n , je nachdem $n \equiv 1$ oder $\equiv 0 \pmod{2}$ ist, mit einer einzigen Linie (einem „speziellen Simony-Knoten“) oder mit zwei miteinander verketteten Linien (einer „speziellen Simony-Kette“) zu tun, wobei im letzteren Fall jede der beiden Linien vom Typus $\left[1, \frac{n}{2}\right]$, somit (vgl. Anm. 11) unverknotet ist. Der Drehungssinn (s. o.) von L_n wird durch das Vorzeichen von n gegeben.

Wenn im folgenden von Simony-Figuren (Simony-Knoten, Simony-Ketten) die Rede ist, so sollen immer nur die „speziellen“ Figuren L_n gemeint sein.

3. Es ist sehr leicht¹³⁾, die singulären Primzahlen einer Simony-Figur L_n anzugeben (s. Nr. 5). Auch wurde an anderer Stelle die umgekehrte Frage behandelt, zu einer vorgegebenen endlichen Menge $\mathfrak{P}$ von ungeraden Primzahlen alle Simony-Figuren L_n aufzustellen, die die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ und sonst keine anderen zu singulären Primzahlen haben, und es wurde dabei gezeigt, daß zu vorgegebener Menge $\mathfrak{P}$ unendlich viele solche L_n gehören¹⁴⁾. Man kann aber auch — und dies ist der Gegenstand der folgenden Zeilen — sowohl für die Figur L_n als auch für ihr Spiegelbild L'_n die Menge der singulären Primzahlen vorschreiben und nach der Gesamtheit aller Paare von Figuren L_n, L'_n fragen, die diesen Forderungen genügen. Allerdings hat man bei Vorgabe der für L_n und für L'_n vorzuschreibenden singulären Primzahlen zu beachten, daß eine singuläre Primzahl p einer Linienfigur K , je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist, unter den singulären Primzahlen der spiegelbildlichen Figur K' stets vorkommt bzw. stets fehlt (vgl. Anm. 20). Wählt man aber die für L_n und L'_n vorzuschreibenden singulären Primzahlen im Einklang mit dieser Bedingung, dann zeigt sich analog wie l. c.¹⁴⁾, daß zu jeder solchen

¹²⁾ Siehe OSKAR SIMONY, Über eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Math. Ann. 19 (1882), S. 110–120 und 24 (1884), S. 253–280.

¹³⁾ Siehe „Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien I“. Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrg. 1942, S. 53–62, Nr. 7, Satz 1.

¹⁴⁾ Siehe zwei Noten „Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen“, die in den Monatsheften für Math. u. Physik erscheinen.

Wahl unendlich viele Paare L_n, L'_n gehören, deren Gesamtheit ohne Schwierigkeit vollständig angegeben werden kann¹⁵⁾ (§§ 3, 4).

4. Nicht ganz dasselbe gilt, wenn man sich nur auf Simony-Knoten also auf L_n mit ungeradem n (vgl. Nr. 2) beschränkt. So gibt es beispielsweise keinen speziellen Simony-Knoten, der ebenso wie sein Spiegelbild die Primzahl als einzige singuläre Primzahl aufweist. Die Bedingung, der die für den Simony-Knoten und sein Spiegelbild vorgeschriebenen singulären Primzahlen zu genügen haben, wenn ein solches Knotenpaar wirklich existieren soll, wird in Nr. 9 besprochen. Im übrigen spielt auch der Drehungssinn herein und die folgenden Entwicklungen geben eine volle Übersicht über alle etwa vorhandenen Figuren-Paare L_n, L'_n , wenn außer den singulären Primzahlen für jede der beiden Figuren noch ihr Drehungssinn vorgeschrieben ist und außerdem vorgeschrieben ist, ob es zwei Knoten oder zwei Ketten sein sollen. Der Fall, daß L_n und L'_n beide frei von singulären Primzahlen sind, wird in § 5 noch besonders besprochen und zum Schluß auf gewisse asymptotische Häufigkeitsfragen hingewiesen.

§ 1.

Die Restklassen-Bedingungen.

5. Sind $k > 0$, $n \geq 0$ ganze Zahlen, dabei n quadratfrei und $N = k^2 n$, dann hat¹⁶⁾ L_N dieselben singulären Primzahlen wie L_n , so daß wir uns weiterhin auf die Betrachtung von Simony-Figuren L_n mit quadratfreiem n beschränken können¹⁷⁾. Singulär ist nun bei quadratfreiem n eine ungerade Primzahl p dann und nur dann, wenn sie in n aufgeht und die Zahl $-\frac{n}{p} = -n_1$ quadratischer Nichtrest modulo p , also — ausgedrückt durch das LEGENDREsche Restsymbol — wenn $\left(\frac{-n_1}{p}\right) = -1$ ist¹⁸⁾. Ist also $\mathfrak{U}$ eine endliche Menge ungerader (positiver) Primzahlen und bezeichnet U ihr Produkt ($U = 1$, wenn $\mathfrak{U}$ die leere Menge ist), so wird für eine Simony-Figur L_n mit quadratfreiem n die Menge der singulären Primzahlen genau mit $\mathfrak{U}$ zusammenfallen dann und nur dann, wenn n die Gestalt UV hat [$V \geq 0$, ganz, quadratfrei

¹⁵⁾ Von einem solchen Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n soll als „zugehörig zu den vorgegebenen Primzahlen“ gesprochen werden.

¹⁶⁾ Vgl. l. c.¹⁴⁾, Note I, Nr. 4.

¹⁷⁾ Für $n = 0$ ergibt sich bei der Figur L_0 (die aus zwei getrennt liegenden unverknoteten Linien besteht) keine singuläre Primzahl.

¹⁸⁾ Vgl. l. c.¹³⁾, Nr. 7, Satz 1, S. 59.

und zu U teilerfremd¹⁹⁾] und dabei einerseits für jeden Primfaktor u von $U (= uU_1)$ die Gleichung

$$(3) \quad - \left(\frac{-U_1 V}{u} \right) = 1,$$

andererseits für jeden Primfaktor v von $V (= vV_1)$ die Gleichung

$$(4) \quad + \left(\frac{-U V_1}{v} \right) = 1$$

gilt²⁰⁾.

6. Sei nun $\mathfrak{P}$ eine endliche Menge von Primzahlen $\equiv 1 \pmod{4}$, seien ferner $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zwei elementfremde endliche Mengen von Primzahlen $\equiv 3 \pmod{4}$, wobei jede dieser Mengen auch leer sein darf. Das Produkt aller (positiv vorausgesetzten) Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{R}$ werde mit P bzw. Q bzw. R bezeichnet (dabei werde jedes dieser Produkte $= 1$ gesetzt, wenn die betreffende Menge leer ist). Wir setzen

$$(5) \quad PQR = M.$$

Soll nun für ein quadratfreies n die Simony-Figur L_n die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ — und keine anderen — zu singulären Primzahlen haben, ihr Spiegelbild L'_n aber die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$, dann muß n eine der Gestalten $\pm MP^*$, $\pm 2MP^*$ haben, hierbei unter P^* eine positive ungerade quadratfreie, zu M teilerfremde Zahl verstanden, deren Primfaktoren offenbar, weil sie weder für L_n noch für L'_n singulär sein sollen, sämtlich $\equiv 1 \pmod{4}$ sein müssen (vgl. Anm. 20). Die Menge der in P^* aufgehenden Primzahlen werde mit $\mathfrak{P}^*$ bezeichnet.

Im Hinblick auf unsere Fragestellung sollen die Primzahlen aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ die *wesentlichen* Primzahlen, dagegen die Primzahlen aus $\mathfrak{P}^*$ die *accessorischen* Primzahlen des Paares L_n, L'_n heißen.

7. Dem Gesagten entsprechend schreiben wir n in der Gestalt

$$(6) \quad n = (-1)^e 2^\sigma PQR P^*,$$

wobei

$$P = \prod p_v, \quad Q = \prod q_v, \quad R = \prod r_v, \quad P^* = \prod p_v^*$$

¹⁹⁾ Im Falle $U = 1$ ($\mathfrak{U}$ leer) liefert außerdem $V = 0$, also $n = 0$ eine zugehörige Simony-Figur (vgl. Anm. 17).

²⁰⁾ Hieraus ist — gemäß dem ersten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{-1}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

— ersichtlich, daß eine für $L_n = [2, n]$ singuläre Primzahl zugleich für $L'_n = [2, -n]$ singulär ist oder nicht, je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist.

gesetzt und sowohl unter ϱ wie unter σ eine der Zahlen 0, 1 verstanden werden. Wir haben dann nur die Bedingungsgleichungen dafür aufzustellen, daß jede der Primzahlen p_v, q_v für L_n singulär, hingegen jede der Primzahlen r_v, p_v^* nicht-singulär sei, woraus schon folgt (vgl. Nr. 3 und Anm. 20), daß für L'_n die Primzahlen p_v, r_v singulär, dagegen die Primzahlen q_v, p_v^* nicht-singulär sind²¹⁾.

Ist nun beispielsweise p eine Primzahl aus $\mathfrak{P}$, so wird

$$-n_1 = -\frac{n}{p} = (-1)^{\varrho+1} 2^\sigma \Pi' p_v \Pi q_v \Pi r_v \Pi p_v^*,$$

wenn Π' das über alle Primfaktoren p_v von P mit Ausnahme von p erstreckte Produkt bedeutet. Gemäß (3) bzw. (4) in Nr. 5 erhält man daher für die Singularität einer jeden Primzahl p aus $\mathfrak{P}$ und analog für die Singularität der Primzahlen q aus $\mathfrak{Q}$, sowie für die Nicht-Singularität der Primzahlen r aus $\mathfrak{R}$ und p^* aus $\mathfrak{P}^*$ die Bedingungen²²⁾

$$(7, a) \quad 1 = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{p}\right)^\sigma \cdot \Pi' \left(\frac{p_v}{p}\right) \cdot \Pi \left(\frac{q_v}{p}\right) \cdot \Pi \left(\frac{r_v}{p}\right) \cdot \Pi \left(\frac{p_v^*}{p}\right),$$

$$(7, b) \quad 1 = -\left(\frac{-1}{q}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{q}\right)^\sigma \cdot \Pi \left(\frac{p_v}{q}\right) \cdot \Pi' \left(\frac{q_v}{q}\right) \cdot \Pi \left(\frac{r_v}{q}\right) \cdot \Pi \left(\frac{p_v^*}{q}\right),$$

$$(7, c) \quad 1 = +\left(\frac{-1}{r}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^\sigma \cdot \Pi \left(\frac{p_v}{r}\right) \cdot \Pi \left(\frac{q_v}{r}\right) \cdot \Pi' \left(\frac{r_v}{r}\right) \cdot \Pi \left(\frac{p_v^*}{r}\right),$$

$$(7, d) \quad 1 = +\left(\frac{-1}{p^*}\right)^{\varrho+1} \cdot \left(\frac{2}{p^*}\right)^\sigma \cdot \Pi \left(\frac{p_v}{p^*}\right) \cdot \Pi \left(\frac{q_v}{p^*}\right) \cdot \Pi \left(\frac{r_v}{p^*}\right) \cdot \Pi' \left(\frac{p_v^*}{p^*}\right),$$

wobei die Bedeutung der Produkte Π' in den Gleichungen (7, b), (7, c), (7, d) in Analogie mit (7, a) klar ist.

Wenn man nun zu den vorgeschriebenen Primzahlen p_v, q_v, r_v aus $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ noch die Zahlen ϱ, σ (gleich 0 oder 1) in bestimmter Weise gewählt denkt, dann besteht unsere Aufgabe darin, alle Systeme $\mathfrak{P}^*$ von Primzahlen p_v^* aufzustellen, für welche die Gesamtheit der Bedingungen (7) erfüllt ist. Da es sich hierbei um Beziehungen zwischen Restsymbolen handelt, durch welche entweder [nämlich bei den Symbolen von der Gestalt $\left(\frac{-1}{u}\right), \left(\frac{2}{u}\right)]$ die Restklasse der betreffenden Primzahl u mod. 4 bzw. 8, oder [nämlich bei den

²¹⁾ Vertauscht man innerhalb des Paares L_n, L'_n die Rolle der beiden Figuren L_n und L'_n , so läuft dies auf Umkehrung des Drehungssinnes (also Ersetzen von ϱ durch $1 - \varrho$) und auf Vertauschen der Mengen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ hinaus. In den im folgenden aufgestellten Bedingungsgleichungen (7) spricht sich dies einfach darin aus, daß die Bedingungen (7, b), (7, c) miteinander vertauscht werden, hingegen (7, a) und (7, d) ungeändert bleiben.

²²⁾ Wenn eine der Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}^*$ leer ist, dann entfallen natürlich die entsprechenden Bedingungen, z. B. die Bedingungen (7, b), wenn $\mathfrak{Q}$ leer ist. Sind alle diese Mengen leer, so entfallen die Bedingungen (7) überhaupt.

Symbolen von der Gestalt $\left(\frac{u}{v}\right)$ die Restklasse von u modulo einer anderen ungeraden Primzahl v Beschränkungen unterworfen wird, so sollen die Bedingungen (7) kurz als die „Restklassen-Bedingungen“ bezeichnet werden²³⁾. Zusammenfassend können wir also zunächst feststellen:

Satz 1. Das Erfülltsein der Restklassen-Bedingungen (7) ist notwendig und hinreichend dafür, daß die getroffene Wahl der Menge $\mathfrak{P}^*$ der accessorischen Primzahlen auf ein „zu ϱ , σ , $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gehöriges“ Paar von Simony-Figuren L_n , L'_n führt.

§ 2.

Die Anzahlbedingung. Primzahlmengen ohne zugehörigen Simony-Knoten.

8. Es möge mit α bzw. γ die Anzahl der Primzahlen aus $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden, die $\equiv 1$ bzw. $\equiv 5 \pmod{8}$ sind; die entsprechende Bedeutung mögen α^* und γ^* für die Menge $\mathfrak{P}^*$ haben. Ferner sei β bzw. δ die Anzahl der Primzahlen aus $\mathfrak{Q}$, die $\equiv 3$ bzw. $\equiv 7 \pmod{8}$ sind, und es mögen β' , δ' die entsprechenden Anzahlen für die Menge $\mathfrak{R}$ sein. In den einzelnen Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ verteilen sich also die Primzahlen auf die Restklassen mod. 8 gemäß der folgenden

Anzahl-Tabelle.

	1	3	5	7
$\mathfrak{P}$	α	0	γ	0
$\mathfrak{Q}$	0	β	0	δ
$\mathfrak{R}$	0	β'	0	δ'
$\mathfrak{P}^*$	α^*	0	γ^*	0

Wir setzen noch

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \alpha + \gamma = c, \quad \alpha^* + \gamma^* = c^*, \\
 (9) \quad & \beta + \delta = d, \quad \beta' + \delta' = d', \\
 (10) \quad & c + d = b, \quad c + d' = b', \\
 (11) \quad & c + d + d' = g, \\
 (12) \quad & c + d + d' + c^* = a.
 \end{aligned}$$

²³⁾ Dabei soll beispielsweise von der angeschriebenen Restklassen-Bedingung (7, a) gesagt werden, sie beziehe sich auf die Primzahl p ; und analog sagen wir, wenn w irgendeine Primzahl aus einer der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^*$ ist, daß diejenige Restklassen-Bedingung sich auf w bezieht, in der die Restsymbole $\left(\frac{-1}{w}\right)$, $\left(\frac{2}{w}\right)$, $\left(\frac{p_v}{w}\right)$, $\left(\frac{q_v}{w}\right)$, $\left(\frac{r_v}{w}\right)$, $\left(\frac{p^*}{w}\right)$ auftreten.

Nunmehr kehren wir zurück zu den a Restklassen-Relationen (7). Wir wollen ihr Produkt bilden²⁴⁾. Dabei folgt zunächst aus den Ergänzungssätzen zum quadratischen Reziprozitätsgesetz: In allen Relationen (7, a) bzw. (7, d) ist $\left(\frac{-1}{p}\right)$ bzw. $\left(\frac{-1}{p^*}\right)$ gleich $+1$; in allen Relationen (7, b) bzw. (7, c) ist $\left(\frac{-1}{q}\right)$ bzw. $\left(\frac{-1}{r}\right)$ gleich -1 ; in γ von den Relationen (7, a) hat $\left(\frac{2}{p}\right)$ den Wert -1 und dasselbe gilt für $\left(\frac{2}{q}\right)$ bzw. $\left(\frac{2}{r}\right)$ bzw. $\left(\frac{2}{p^*}\right)$ für β bzw. β' bzw. γ^* von den Relationen (7, b) bzw. (7, c) bzw. (7, d). Wenn ferner u und v irgend zwei verschiedene Primfaktoren von $PQR P^*$ sind, so kommt jedes der Restsymbole $\left(\frac{u}{v}\right)$ und $\left(\frac{v}{u}\right)$ in genau einer der Relationen (7) vor. Ihr Produkt $\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \left(\frac{v}{u}\right)$ aber hat nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz den Wert -1 dann und nur dann, wenn die Primzahlen u und v beide $\equiv 3 \pmod{4}$ sind; und da es unter den Primfaktoren von $PQR P^*$ genau $d + d'$ Primzahlen $\equiv 3 \pmod{4}$ gibt, so ergibt sich für $\frac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1)$ Paare u, v der Wert $\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \left(\frac{v}{u}\right) = -1$, für alle anderen Paare aber ist er $= +1$. Alles dies zusammengenommen zeigt, daß die Multiplikation aller Relationen (7) auf die Gleichung

$$+1 = (-1)^b (-1)^{(q+1)(d+d')} (-1)^{\sigma(\beta+\beta'+\gamma+\gamma^*)} (-1)^{\frac{1}{2}(d+d')(d+d'-1)}$$

oder auf

$$(13) \quad 0 \equiv b + (q+1)(d+d') + \sigma(\beta+\beta'+\gamma+\gamma^*) + \frac{1}{2}(d+d')(d+d'-1) \pmod{2}$$

führt. Es ist das eine von den Primzahlmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}^*$ und von den Zahlen q, σ zu erfüllende Bedingung²⁵⁾, in der nicht, wie in den Bedingungsgleichungen (7) Restsymbole auftreten, sondern außer q und σ nur mehr Anzahlen wie β, β' usw. Wir wollen diese Bedingung (13) daher als die „Anzahlbedingung“ bezeichnen. Hierzu noch die folgende

Bemerkung. Wenn $a = 1$ ist, d. h. wenn alle Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}^*$ zusammen nur eine einzige Primzahl enthalten, also nur eine einzige Bedingung (7) vorliegt²⁶⁾, dann deckt sich diese inhaltlich natürlich mit (13).

²⁴⁾ Wobei natürlich der Fall, daß alle Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{P}^*$ leer sind und gar keine Relationen (7) vorliegen (vgl. Anm. 22) außer Betracht bleibt.

²⁵⁾ Gegenüber Vertauschung der Rollen von L_n und L'_n (vgl. Anm. 21) ist die Bedingung (13) natürlich invariant, wie sich wegen $b' = b + d' - d \equiv b + d + d' \pmod{2}$ unmittelbar aus $b' + (1 - q) + 1)(d' + d) \equiv b' + q(d + d') \equiv b + (q + 1)(d + d') \pmod{2}$ ergibt.

²⁶⁾ Falls alle genannten Mengen leer sind (vgl. Anm. 24), ist (13) wegen $b = d = d' = \beta = \beta' = \gamma = \gamma^* = 0$ natürlich von selbst erfüllt.

st aber die Anzahl α der Bedingungen (7) größer als eins, dann erhält man ein System der (für das Vorhandensein eines zugehörigen Paares L_n, L'_n notwendigen und hinreichenden) Bedingungen (7) gleichwertiges System, indem man eine der Bedingungen (7) durch die Anzahlbedingung (13) ersetzt.

9. Im allgemeinen, d. h. wenn mehr als eine Bedingung (7) vorliegt, stellt die Anzahlbedingung (13) nur eine auf die Zahlen ϱ, σ , auf die wesentlichen Primzahlmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ und die accessorische Primzahlmenge $\mathfrak{P}^*$ bezügliche notwendige, nicht aber auch hinreichende Bedingung für die Existenz zugehöriger Figuren-Paare L_n, L'_n dar. Dabei ist der Fall der Simony-Ketten ($\sigma = 1$) vom Fall der Simony-Knoten ($\sigma = 0$) insofern wesentlich verschieden, als im letzteren die Zahl γ^* aus (13) herausfällt und diese Bedingung sonach überhaupt nichts mehr mit den accessorischen Primzahlen zu tun hat, vielmehr nur die wesentlichen Primzahlen und den (durch ϱ bestimmten) Drehungssinn betrifft. Da aber das Nichterfülltsein von (13) die Existenz eines den vorgeschriebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ zugehörigen Figuren-Paares L_n, L'_n ausschließt, so können wir sagen:

Satz 2. Zu den vorgeschriebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ gibt es kein zugehöriges Paar von Simony-Knoten L_n, L'_n mit dem durch die Zahl ϱ bestimmten Drehungssinn, wenn die auf diese Primzahlmengen (gemäß Nr. 8) bezüglichen Anzahlen d, d', b der Kongruenz

$$(14) \quad 1 \equiv b + (\varrho + 1)(d + d') + \frac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1) \pmod{2}$$

erfüllt sind.

Daraus folgt insbesondere für den Fall, daß die Anzahl d der Primzahlen aus $\mathfrak{Q}$ mit der Anzahl d' der Primzahlen aus $\mathfrak{R}$ übereinstimmt oder sich von ihr nur um eine gerade Zahl unterscheidet:

Satz 3. Zu den vorgeschriebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ gibt es überhaupt kein zugehöriges Paar von Simony-Knoten (gleichgültig welchen Drehungssinnes), wenn die Kongruenzen

$$\begin{aligned} d &\equiv d', \\ 1 &\equiv b + \frac{1}{2}(d + d')(d + d' - 1) \end{aligned} \pmod{2}$$

erfüllt sind.

Beispielsweise liegt dieser Fall vor, wenn die beiden Mengen $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ leer sind, dagegen die Menge $\mathfrak{P}$ eine ungerade Anzahl von Primzahlen enthält. Ein spezieller Fall dieser Art (mit einer aus einer einzigen Primzahl bestehenden Menge $\mathfrak{P}$) wurde bereits in der Einleitung (Nr. 4) erwähnt.

§ 3.

Ist die Anzahlbedingung erfüllt, so gibt es unendlich viele zugehörige Paare von Simony-Figuren mit accessorischen Primzahlen.

10. In Satz 2 von Nr. 9 wird eine Gesamtheit von Fällen angegeben (unter denen sich auch die in Satz 3 aufgeführten als Sonderfälle befinden), in denen zu vorgegebenem q , zu vorgegebenem σ ($= 0$) und zu vorgegebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ kein zugehöriges Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n vorhanden ist. Im Gegensatz dazu werden wir nachweisen können (vgl. unten die Sätze 4 und 5), daß in allen anderen Fällen stets zugehörige Paare L_n, L'_n existieren, und zwar sogar unendlich viele mit quadratfreiem n (außerdem dann natürlich noch gemäß Nr. 5 unendlich viele andere L_N, L'_N mit $N = k^2 n$). Wenn wir über diesen Nachweis hinaus eine Übersicht über *alle* zu einem gegebenen System $q, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ gehörigen Paare L_n, L'_n gewinnen wollen, so werden wir bei den bezüglichlichen Überlegungen die Fälle *mit* accessorischen Primzahlen (also $c^* \geq 1$) getrennt behandeln von jenen speziellen Fällen, in denen accessorische Primzahlen *fehlen* (also $c^* = 0$ ist). Die Behandlung dieser letzteren Fälle wollen wir auf § 4 verschieben und uns den Fällen mit accessorischen Primzahlen zuwenden²⁷⁾.

11. Über das gegebene System $q, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ machen wir also die Voraussetzung, daß nicht die Relationen $\sigma = 0$ und (14) alle beide gelten. Falls also $\sigma = 0$ ist, dann ist dieser Voraussetzung gemäß die Anzahlbedingung (13) erfüllt. Ist aber $\sigma = 1$, dann läßt sich γ^* so bestimmen, daß (13) erfüllt ist; denn offenbar kommt es nur darauf an, ob γ^* eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und wenn hierüber geeignet verfügt wird, dann wird die Kongruenz (13) gelten. Ob also der eine Fall ($\sigma = 0$) oder der andere ($\sigma = 1$) vorliegt, stets können wir auf unendlich viele Arten α^* und γ^* so wählen, daß die Bedingung (13) erfüllt ist. Da wir, wie gesagt, die Betrachtung des Falles $c^* = 0$ (d. h. $\alpha^* = \gamma^* = 0$) auf § 4 verschieben, so wollen wir jetzt über α^*, γ^* noch die Voraussetzung

$$(15) \quad c^* = \alpha^* + \gamma^* \geq 1$$

machen.

Für die weiteren Betrachtungen haben wir also auszugehen von dem gegebenen System $q, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ und von zwei Zahlen α^*, γ^* von der Art, daß sowohl (13) als (15) erfüllt ist. Und die zu behandelnde Frage ist, ob wir die Menge $\mathfrak{P}^*$ der accessorischen Primzahlen so bestimmen können, daß einerseits

²⁷⁾ Bemerkt sei, daß sich in die Überlegungen der §§ 3 und 4 auch der Fall $g = 0$, in welchem alle drei Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ leer sind, einbeziehen läßt. Doch werden wir diesen Fall, der für die Behandlung gewisse Besonderheiten aufweist, in § 5 selbständig besprechen.

ihre Verteilung auf die Restklassen 1 und 5 (mod. 8) in Einklang steht mit den bereits gewählten Werten von α^* und γ^* , und daß andererseits die Primzahlen aus $\mathfrak{P}^*$ den sämtlichen a Restklassen-Bedingungen (7) genügen. Wir werden sehen, daß eine solche Bestimmung von $\mathfrak{P}^*$ stets, und zwar auf unendlich viele Arten möglich ist, daß also der Satz gilt:

Satz 4. *Zu den gegebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, zu den Zahlen ϱ , σ und zu Anzahlen α^* , γ^* , die der Voraussetzung (15) genügen, läßt sich bei Erfülltsein von (13) eine zugehörige Primzahlmenge $\mathfrak{P}^*$ auf unendlich viele Arten bestimmen.*

In diesem Satz 4, mit enthalten ist der folgende

Satz 5. *Zu vorgegebenen Zahlen ϱ , σ und vorgegebenen Primzahlmengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, für die nicht $\sigma = 0$ und (14) gilt, existieren stets unendlich viele zugehörige Paare von Simony-Figuren L_n , L'_n mit accessorischen Primzahlen (und zwar mit quadratfreiem n)²⁸⁾.*

Beim Nachweis von Satz 4 soll zunächst (in Nr. 12) der Fall $c^* = 1$ und dann (in Nr. 13) der Fall $c^* > 1$ vorgenommen werden.

12. Im Falle $c^* = 1$ ist eine der Zahlen α^* , γ^* gleich 0, die andere gleich 1; anders gesagt: Von der einen accessorischen Primzahl p^* , aus der die zu bestimmende Menge $\mathfrak{P}^*$ bestehen soll, ist die Restklasse mod. 8, der p^* angehören soll (ob nämlich $p^* \equiv 1$ oder $\equiv 5$ sein soll), festgelegt. Andererseits folgt aus der Bemerkung am Schluß von Nr. 8, daß wegen Erfülltsein der Anzahlbedingung (13) von den Restklassen-Bedingungen (7) nur $a - 1$ erfüllt zu werden brauchen, um zu gewährleisten, daß sämtliche a Bedingungen (7) gelten. Wir wollen die (im Sinne von Anm. 23) auf p^* bezügliche Bedingung (7, d) weglassen und danach trachten, die übrigen auf die wesentlichen Primzahlen bezüglichen $a - 1 = g$ Bedingungen (7, a), (7, b), (7, c) durch geeignete

²⁸⁾ Wollte man nur diesen Satz 5 feststellen, dann wäre es nicht nötig, Satz 4 für beliebige der Voraussetzung (15) genügende Werte von α^* und γ^* zu beweisen. Vielmehr würde es ausreichen, sich beim Beweis mit einem der Fälle $c^* = 1$ und $c^* > 1$ zu begnügen. Denn ob nun $\sigma = 0$ oder $\sigma = 1$ ist, so ist es allemal möglich, der Anzahlbedingung (13) speziell auch so zu genügen, daß γ^* gleich einer der Zahlen 0 oder 1 wird und man braucht dann nur α^* gleich 1 oder 0 zu nehmen, um $c^* = \alpha^* + \gamma^* = 1$ zu bekommen; es ist somit Satz 5 nachgewiesen, sobald Satz 4 für $c^* = 1$ bewiesen ist. Das Erfülltsein von (13) wird aber andererseits nicht gestört, wenn α^* beliebig vergrößert wird und γ^* entweder (im Falle $\sigma = 0$) ebenfalls beliebig vergrößert wird oder (im Falle $\sigma = 1$) um eine gerade Zahl, so daß die Anzahlbedingung (13) stets auch so erfüllt werden kann, daß $c^* > 1$ ist; somit würde für den Nachweis von Satz 5 auch der Beweis von Satz 4 für $c^* > 1$ ausreichen.

Da wir eine Übersicht über alle zu ϱ , σ , $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ gehörigen Paare L_n , L'_n geben wollen, sind beide Fälle $c^* = 1$ und $c^* > 1$ zu besprechen.

Wahl von p^* zu befriedigen. Wir wollen dabei $g > 0$ annehmen²⁹⁾. In jeder der fraglichen g Restklassen-Bedingungen sind dann durch ϱ , σ , $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ alle auftretenden Größen festgelegt mit Ausnahme des einen Symbols von der Gestalt $\left(\frac{p^*}{w}\right)$, in welchem w diejenige wesentliche Primzahl bedeutet, auf die sich die fragliche Restklassen-Bedingung bezieht. Diese Bedingung legt also den Wert von $\left(\frac{p^*}{w}\right)$ und damit $\frac{w-1}{2}$ teilerfremde Restklassen mod. w fest, in deren einer die Primzahl p^* liegen muß. Beachten wir, daß außerdem die Restklasse mod. 8, der p^* anzugehören hat, festgelegt ist, und bezeichnen wir mit $w_1, \dots, w_g$ die sämtlichen Primzahlen aus den Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, so bekommen wir insgesamt $\frac{1}{2^g} \prod (w_i - 1)$ teilerfremde Restklassen mod. $8 \prod w_i = 8 PQR = 8M$, so daß durch die Wahl von p^* in einer dieser Restklassen das Erfülltsein aller Bedingungen (7) gesichert ist. Da nach dem DIRICHLETschen Satz jede dieser Restklassen unendlich viele Primzahlen enthält, so ist damit Satz 4 für den Fall $c^* = 1$ bewiesen.

Als Beispiel betrachten wir für eine Simony-Kette ($\sigma = 1$) den Fall, daß $\mathfrak{P}$ aus der einen Primzahl $p = 5$, $\mathfrak{Q}$ aus der einen Primzahl $q = 3$ besteht und daß $\mathfrak{R}$ leer ist. Es ist dann $\alpha = \delta = \beta' = \delta' = 0$, $\beta = \gamma = 1$, $c = d = 1$, $d' = 0$, $b = 2$, $g = 2$. Gemäß $c^* = 1$, d. h. bei einer einzigen accessorischen Primzahl p^* haben wir dann $n = (-1)^e 2 p q p^* = (-1)^e 30 p^*$. Die Anzahlbedingung liefert $\gamma^* \equiv \varrho + 1 \pmod{2}$ und die auf p und q bezüglichen Restklassen-Bedingungen ergeben

$$\left(\frac{p^*}{5}\right) = -1, \quad \left(\frac{p^*}{3}\right) = (-1)^e.$$

Für positiven Drehungssinn ($e = 0$) folgt daraus $\gamma^* = 1$, $\alpha^* = 0$, $p^* \equiv 5 \pmod{8}$, $p^* \equiv 1 \pmod{3}$, woraus wegen $p^* \equiv 2$ oder $3 \pmod{5}$ sich ergibt, daß p^* eine Primzahl $\equiv 13$ oder $37 \pmod{120}$ sein muß; $n = 30 p^*$ liefert dann ein Paar Simony-Ketten der verlangten Art. Für negativen Drehungssinn ($e = 1$) aber hat man $\gamma^* = 0$, $\alpha^* = 1$, $p^* \equiv 1 \pmod{8}$, $p^* \equiv 2 \pmod{3}$, wegen $p^* \equiv 2$ oder $3 \pmod{5}$ muß also p^* eine Primzahl $\equiv 17$ oder $113 \pmod{120}$ sein und $n = -30 p^*$ liefert dann ein Paar Simony-Ketten mit den gewünschten singulären Primzahlen.

13. Nicht wesentlich schwieriger ist der Fall $c^* > 1$. Wir setzen $c^* - 1 = h$ und bezeichnen die zu bestimmenden accessorischen Primzahlen mit $p_1^*, \dots, p_h^*, p_{h+1}^* = p^*$, wobei wir im Einklang mit den bereits festgelegten Anzahlen α^*, γ^* für jede dieser Primzahlen p_r^* festsetzen, ob sie $\equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ gewählt werden soll. Die Bestimmung der c^* Primzahlen p_r^* erfolgt nun in zwei Schritten. Beim ersten Schritt wählen wir jede der Prim-

²⁹⁾ Falls $g = 0$, also $a = 1$ ist, ist das System der Bedingungen (7), der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 gemäß, mit der einen Anzahlbedingung (13) gleichwertig, nach unserer Voraussetzung also von selbst erfüllt, sobald die Primzahl p^* im Einklang mit den Werten von α^*, γ^* , d. h. also in der geeigneten Restklasse mod. 8 (sei es $\equiv 1$, sei es $\equiv 5$) gewählt wird. Auch in diesem Fall des Fehlens wesentlicher Primzahlen (vgl. Anm. 27 und § 5) bestehen also für die Wahl von p^* und somit von $\mathfrak{P}^*$ unendlich viele Möglichkeiten: Satz 4 gilt auch für $g = 0$.

zahlen $p_1^*, \dots, p_h^*$, und zwar im Einklang mit der für die betreffende Primzahl p_v^* festgesetzten Restklasse mod. 8, sonst aber beliebig, so daß schon hierbei unendlich viele Möglichkeiten für dieses System der „vorausgewählten“ Primzahlen $p_1^*, \dots, p_h^*$ vorliegen. Ist diese Vorauswahl getroffen, dann beachten wir wieder, daß wegen des Erfülltseins der Anzahlbedingung (13) gemäß der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 von den a Restklassen-Bedingungen (7) die eine, auf p^* bezügliche, weggelassen werden kann und nur die übrigen $a - 1$ erfüllt zu werden brauchen, um sicher zu sein, daß sämtliche Bedingungen (7) gelten. Jede der $a - 1$ beibehaltenen Bedingungen bezieht sich dann (im Sinne von Anm. 23) auf eine der g wesentlichen Primzahlen oder auf eine der h vorausgewählten Primzahlen p_v^* ($1 \leq v \leq h$). Sei w eine dieser $g + h = a - 1$ Primzahlen³⁰). In der auf w bezüglichen Bedingung (7) sind dann alle auftretenden Größen festgelegt mit Ausnahme des Symbols $\left(\frac{p^*}{w}\right)$. Um also sämtlichen Bedingungen zu genügen, braucht — als zweiter Schritt zur Bestimmung von $\mathfrak{P}^*$ — nur mehr die „restierende“ Primzahl p^* so bestimmt zu werden, daß jedes der Symbole $\left(\frac{p^*}{w}\right)$ den Wert erhält, der sich aus der auf die Primzahl w bezüglichen Restklassen-Bedingung (7) ergibt. Da jeder dieser Werte für die Wahl von p^* auf $\frac{w-1}{2}$ zulässige teilerfremde Restklassen mod. w führt und außerdem die Restklasse mod. 8, in der p^* liegen soll, bereits feststeht, so stehen insgesamt $\frac{1}{2^{a-1}} \prod (w - 1)$ teilerfremde Restklassen mod. 8 $\prod w = 8 PQR p_1^* \dots p_h^*$ für die Primzahl p^* zur Verfügung. Nach dem DIRICHLETSchen Satz enthält jede dieser Restklassen unendlich viele Primzahlen, deren jede, für p^* genommen, auf eine zulässige Menge $\mathfrak{P}^*$ führt. Damit ist Satz 4 auch im Falle $c^* > 1$ nachgewiesen.

Als Beispiel betrachten wir für eine Simony-Kette mit negativem Drehungssinn $\sigma = 1$, $\varrho = 1$) wieder (vgl. Nr. 12) den Fall, daß $\mathfrak{P}$ aus der einen Primzahl $p = 5$, $\mathfrak{Q}$ aus der einen Primzahl $q = 3$ besteht und daß $\mathfrak{R}$ leer ist. Die Anzahl c^* der accessoriischen Primzahlen wollen wir $= 3$ vorschreiben, somit n in der Gestalt $n = -2pq p_1^* p_2^* p_3^* = -30 p_1^* p_2^* p_3^*$ ansetzen. Die Anzahlbedingung (13) liefert jetzt $\gamma^* \equiv 0 \pmod{2}$, also $\gamma^* = 0, \alpha^* = 3$ oder $\gamma^* = 2, \alpha^* = 1$. Wir wollen den zweiten Fall vornehmen und wollen im besonderen die accessorischen Primzahlen auf die Restklassen mod. 8 so verteilen, daß $p_1^* \equiv 1$ und $p_2^* \equiv p_3^* \equiv 5 \pmod{8}$ ist. Als ersten Schritt des weiteren Verfahrens verfügen wir über die „Vorauswahl“ von p_1^* und p_2^* und setzen etwa $p_1^* = 17$, $p_2^* = 13$, somit $n = -2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 13 \cdot p^* = -6630 p^*$. Aus den auf die Primzahlen 5, 3, 17 und 13 bezüglichen Restklassen-Bedingungen ergibt sich dann $\left(\frac{p^*}{5}\right) = -1$, $\left(\frac{p^*}{3}\right) = +1$, $\left(\frac{p^*}{17}\right) = +1$, $\left(\frac{p^*}{13}\right) = +1$; in Einklang damit wollen

³⁰) Es ist dabei belanglos, ob $g > 0$ oder $g = 0$ ist, so daß auch der letztere Fall des Fehlens wesentlicher Primzahlen (vgl. Anm. 27 und § 5) hier mit inbegriffen erscheint.

wir z. B. $p^* \equiv 2 \pmod{5}$, $p^* \equiv 1 \pmod{3}$, $p^* \equiv 4 \pmod{17}$, $p^* \equiv 1 \pmod{13}$ also
— wegen $p^* \equiv 5 \pmod{8}$ —

$$p^* \equiv 157 \pmod{8 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 13 = 26520}$$

ansetzen. Für p^* können wir dann irgendeine der unendlich vielen, dieser Kongruenz genügenden Primzahlen, z. B. 157 oder 53197, nehmen und erhalten dann mit $n = -6630 p^*$ eine Simony-Kette der gewünschten Art.

§ 4.

Fälle ohne accessorische Primzahlen.

14. Wir kommen nun zu dem in § 3 beiseite gelassenen Fall (vgl. Nr. 10), daß die Menge $\mathfrak{P}^*$ der accessorischen Primzahlen leer ist ($c^* = 0$). Liegt dieser Fall vor, dann entfallen in dem System (7) von notwendigen und hinreichenden Bedingungen die Bedingungen (7, d) und in den übrigen Bedingungen, deren Anzahl gemäß (8) bis (12) durch

$$(16) \quad a = g = \alpha + \gamma + \beta + \delta + \beta' + \delta'$$

gegeben ist, entfällt das letzte über die Primzahlen p_i^* erstreckte Produkt. Die Feststellung, ob für gegebene $\varrho, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind und demgemäß die Zahl

$$(17) \quad n = (-1)^e 2^o PQR$$

ein zugehöriges Paar L_n, L'_n liefert, läßt sich natürlich in jedem einzelnen Fall ohne weiteres durch Einsetzen in die Bedingungen (7, a), (7, b), (7, c) treffen, da diese Bedingungen wegen des Fortfallens der accessorischen Primzahlen nur gegebene und keine frei verfügbaren Elemente enthalten. Insofern liegt ein Problem nicht vor. Immerhin läßt sich mittels einer entsprechenden Klassifikation eine gewisse Übersicht darüber gewinnen, in welchen Fällen zu dem durch (17) gegebenen Wert von n ein zu $\varrho, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ gehöriges Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n existiert, und in welchen Fällen nicht.

15. Zu dieser Klassifikation gelangen wir, wenn wir unterscheiden, ob nach dem Modul 2 die Zahlen d, d' einander kongruent sind oder nicht; ferner ob nach dem Modul 2 die Zahlen γ und $\beta + \beta'$ einander kongruent sind oder nicht. Im ganzen gibt das vier Fälle:

$$\begin{array}{llll} \text{I) } d' \equiv d, & \text{II) } d' \equiv d, & \text{III) } d' \equiv d + 1, & \text{IV) } d' \equiv d + 1, \\ \gamma \equiv \beta + \beta', & \gamma \equiv \beta + \beta' + 1, & \gamma \equiv \beta + \beta', & \gamma \equiv \beta + \beta' + 1 \\ & & \text{(alle Kongruenzen modulo 2).} \end{array}$$

Für jeden dieser Fälle wollen wir die Anzahlbedingung (13) aufstellen, wobei wegen des Fehlens accessorischer Primzahlen $\gamma^* = 0$ zu setzen ist und im übrigen für $x = d + d'$ von der Kongruenz $\frac{1}{2} x(x-1) \equiv [\frac{1}{2} x] \pmod{2}$

Gebrauch gemacht werden soll, hierbei unter $[\frac{1}{2}x]$ die größte ganze Zahl in $\frac{1}{2}x$ verstanden. Man erhält dann in den einzelnen vier Fällen

$$(18, I) \quad 0 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod{2},$$

$$(18, II) \quad \sigma \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod{2},$$

$$(18, III) \quad \varrho + 1 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod{2},$$

$$(18, IV) \quad \sigma + \varrho + 1 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')] \pmod{2}.$$

Der Fall I unterscheidet sich von den übrigen Fällen dadurch, daß keine der Zahlen ϱ, σ in der Anzahlbedingung auftritt, so daß diese nur von den Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ abhängt. Man erhält hier die Aussage:

Satz 6. Sind die Primzahlmengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ derart gewählt, daß für die zugehörigen Anzahlen $d, d', b, \gamma, \beta, \beta'$ nach dem Modul 2 die Konvergenzen

$$d' \equiv d, \quad \gamma \equiv \beta + \beta', \quad 1 \equiv b + [\tfrac{1}{2}(d + d')]$$

gelten, dann wird, wie immer man ϱ (Drehungssinn) und σ (Knoten oder Kette) wählen mag, die gemäß (17) — d. h. ohne accessorische Primzahlen — bestimmte Zahl n niemals auf ein zugehöriges Paar von Simony-Figuren L_n, L'_n führen.

16. Im übrigen sei an die Bemerkung am Schluß von Nr. 8 angeknüpft, die sich auf ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür bezieht, daß zu vorgegebenen $\varrho, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ ein zugehöriges Paar L_n, L'_n existiert: Ein solches System von Bedingungen wird gegeben durch die Anzahlbedingung und die Restklassen-Bedingungen nach Weglassung einer von ihnen.

Danach aber läßt sich eine Übersicht über alle Gesamtheiten $\varrho, \sigma, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, für welche zugehörige Paare L_n, L'_n ohne accessorische Primzahlen existieren, nach dem folgenden Verfahren gewinnen, bei dem wir nur den Fall, daß alle drei Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ leer sind, beiseite lassen, da dieser in § 5 gesondert besprochen wird. Das Verfahren besteht darin, daß hinsichtlich der Mengen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ vorerst gar nicht die in ihnen enthaltenen Primzahlen selbst betrachtet werden, sondern nur die Anzahlen

$$(19) \quad \alpha, \gamma, \beta, \delta, \beta', \delta',$$

also nur die Anzahlen der Primzahlen, die in diesen Mengen enthalten sind, nebst der Art der Verteilung auf die Restklassen mod. 8. Diese Anzahlen denken wir uns zusammen mit den Zahlen ϱ, σ auf alle möglichen Arten so gewählt, daß die Anzahlbedingung (18) erfüllt ist³¹⁾.

³¹⁾ Wie schon in Nr. 15 besprochen, handelt es sich dabei im Fall I um eine nur die Anzahlen (19) betreffende Bedingung: ist die Bedingung (18, I) erfüllt, so sind bezüglich der Wahl von ϱ und σ alle vier Möglichkeiten zulässig, die sich durch $\varrho = 0$

In dem besonderen Falle nun, daß die durch (16) gegebene Anzahl a der Restklassen-Bedingungen (7) gleich 1 ist, brauchen wir uns mit diesen Bedingungen überhaupt nicht mehr zu befassen, da ja dann nur eine einzige Restklassen-Bedingung vorliegt und diese — zufolge der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 — zugleich mit der ihr äquivalenten Anzahlbedingung erfüllt ist. Man braucht dann nur die Primzahlen der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ im Einklang mit den Anzahlen (19) zu wählen. Sei beispielsweise $\gamma = 1$, alle anderen Zahlen (19) gleich 0 genommen, was $b = 1$, $d = d' = 0$ ergibt und da der Fall II von Nr. 15 vorliegt, gemäß (18, II) auf $\sigma = 1$ führt. Die Zahl ρ können wir im Fall II beliebig $= 0$ oder 1 wählen. Nunmehr steht es uns frei, die eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primzahl p — gemäß $\gamma = 1$ — gleich einer ganz beliebigen Primzahl $\equiv 5 \pmod{8}$ zu setzen: stets wird die gemäß (17) bestimmte Zahl $n = (-1)^{\rho} 2p = \pm 2p$ auf ein Paar von Simony-Ketten L_n , L'_n mit p als einziger singulärer Primzahl für L_n und für L'_n führen.

Liegt aber der Fall $a > 1$ vor, dann mögen von den a Primzahlen alle bis auf eine, die wir die „restierende“ nennen, gewählt werden³²⁾, natürlich in entsprechenden Restklassen modulo 8. Es sind dann $a - 1$ Primzahlen der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ festgelegt (wir nennen sie die „vorausgewählten“ Primzahlen und bezeichnen ihr Produkt mit V), während von der einen restierenden Primzahl, die wir w nennen wollen, nur feststeht, welcher der Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ und welcher Restklasse mod. 8 sie angehören soll. Wegen der bereits erfüllten Anzahlbedingung brauchen wir uns dann gemäß der obenerwähnten Bemerkung am Schluß von Nr. 8 nicht um alle a Restklassen-Bedingungen (7, a), (7, b), (7, c) zu kümmern, sondern wir können eine von ihnen weglassen, da sie von selbst erfüllt ist, sofern die übrigen $a - 1$ erfüllt sind. Wir wollen nun diejenige Bedingung weglassen, die sich auf die restierende Primzahl w bezieht. In jeder der übrigen Restklassen-Bedingungen sind dann alle Größen bekannt bis auf das darin auftretende Restsymbol von einer der Gestalten $\left(\frac{w}{p}\right)$, $\left(\frac{w}{q}\right)$, $\left(\frac{w}{r}\right)$, wobei p, q, r alle „vorausgewählten“ Primzahlen aus $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ zu durchlaufen hat. Diese letzteren Restsymbole können also aus den Restklassen-Bedingungen berechnet werden; im Einklang mit diesen Werten der Restsymbole kann nun bezüglich jeder der vorausgewählten Primzahlen eine bestimmte Restklasse für w gewählt werden. Da außerdem bekannt ist, welcher Restklasse modulo 8 die Primzahl w anzugehören hat, so ergibt sich aus alledem für w eine Restklasse mod. 8 V . Jedwede Primzahl aus dieser Restklasse

oder 1 und $\sigma = 0$ oder 1 ergeben. Dagegen ist in den anderen Fällen II, III, IV die zugehörige Bedingung (18) derart, daß von den genannten vier Möglichkeiten bezüglich ρ und σ immer nur zwei zulässig sind, im Fall II beispielsweise ρ beliebig, hingegen σ durch die Anzahlen (19) festgelegt ist.

³²⁾ Die Überlegungen verlaufen ähnlich wie die in Nr. 13.

kann dann für w genommen werden und führt auf ein System von Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, das zusammen mit den gewählten Werten von ϱ , σ ein Paar von Simony-Figuren ohne accessorische Primzahlen liefert.

Als Beispiel wählen wir den Fall $\gamma = 1$, $\beta = 2$, $\delta' = 1$, $\alpha = \delta = \beta' = 0$, also $c = 1$, $d = 2$, $d' = 1$, $b = 3$, $a = 4$. Wir wählen die eine Primzahl aus $\mathfrak{P}$ (im Einklang mit $\gamma = 1$ muß sie $\equiv 5$ modulo 8 sein) gleich 5, ferner die eine Primzahl aus $\mathfrak{R}$ (im Einklang mit $\delta' = 1$ muß sie $\equiv 7$ modulo 8 sein) gleich 7, schließlich eine von den beiden Primzahlen aus $\mathfrak{Q}$ (die wegen $\beta = 2$ beide $\equiv 3$ modulo 8 sein müssen) gleich 3; als „vorausgewählte“ Primzahlen haben wir also $p = 5$, $q_1 = 3$, $r = 7$; für die noch „restierende“ Primzahl $w = q$ haben wir $q \equiv 3 \pmod{8}$. Ersichtlich ist $d' \neq d$, $\gamma \neq \beta + \beta'$, es liegt also Fall IV aus Nr. 15 vor und die Anzahlbedingung (18, IV) gibt $\sigma \neq \varrho \pmod{2}$, also $\varrho = 1 - \sigma$. Gemäß (17) wird somit $n = -(-2)^\sigma 105 q$ und von den Restklassen-Bedingungen (7) lauten die drei auf die vorausgewählten Primzahlen 5, 3 und 7 bezüglichen

$$1 = - \left(\frac{-2}{5} \right)^\sigma \left(\frac{21}{5} \right) \left(\frac{q}{5} \right), \quad 1 = - \left(\frac{-2}{3} \right)^\sigma \left(\frac{35}{3} \right) \left(\frac{q}{3} \right), \quad 1 = + \left(\frac{-2}{7} \right)^\sigma \left(\frac{15}{7} \right) \left(\frac{q}{7} \right),$$

woraus sich

$$\left(\frac{q}{5} \right) = (-1)^{\sigma+1}, \quad \left(\frac{q}{3} \right) = +1, \quad \left(\frac{q}{7} \right) = (-1)^\sigma$$

ergibt. Nehmen wir etwa den Fall $\sigma = 0$ (Simony-Knoten), also $\varrho = 1$ und $n = -105 q$, so sehen wir, daß $q \equiv 2$ oder $3 \pmod{5}$ und $\equiv 1, 2$ oder $4 \pmod{7}$ ferner $\equiv 1 \pmod{3}$, außerdem $\equiv 3 \pmod{8}$ und daß daher die Primzahl q modulo $5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 8 = 840$ einer der Zahlen 43, 67, 163, 403, 547, 667 kongruent sein muß. Man braucht also für q nur eine Primzahl aus einer dieser Restklassen mod. 840 zu wählen und man erhält dann für $n = -105 q$ einen Simony-Knoten L_n ohne accessorische Primzahlen mit 5, 3 und q als singulären Primzahlen von L_n , und 5, 7 als singulären Primzahlen von L'_n . — Analog ergibt sich im Fall $\sigma = 1$, also $\varrho = 0$ und $n = +210 q$, daß man für jede Primzahl q , die modulo 840 einer der Zahlen 19, 139, 451, 619, 691, 811 kongruent ist, eine Simony-Kette L_n ohne accessorische Primzahlen erhält, bei der 5, 3, q die singulären Primzahlen von L_n und 5, 7 jene von L'_n sind.

§ 5.

Simony-Knoten und -Ketten ohne singuläre Primzahlen.

17. Wir wollen noch den Fall besonders besprechen, daß alle drei Mengen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ leer sind, also die gemäß (11) bestimmte Zahl $g = 0$ ist.

Zunächst ist klar, daß wir in diesem Fall (bei beliebiger Wahl von ϱ und σ) ein zugehöriges Paar von Simony-Figuren erhalten, wenn wir gar keine accessorischen Primzahlen nehmen ($\mathfrak{P}^*$ leer, $c^* = 0$), da sich dann überhaupt keine Restklassen-Bedingungen (7) ergeben, die zu befriedigen wären. Die zugehörigen Werte von n sind dann ± 1 und ± 2 und liefern das Paar von

Simony-Knoten L_1 , $L_{-1} = L'_1$ und das Paar von Simony-Ketten L_2 , $L_{-2} = L'_2$ ³³⁾.

Bei Heranziehung accessorischer Primzahlen ist für jede solche Primzahl p^* gemäß (7, d) eine zugehörige Restklassen-Bedingung

$$(20) \quad 1 \equiv \left(\frac{2}{p^*}\right)^\sigma \prod' \left(\frac{p_v^*}{p^*}\right)$$

zu erfüllen; dabei läßt sich, gemäß der Schlußbemerkung von Nr. 8, eine dieser Bedingungen (20) durch die „Anzahlbedingung“ ersetzen, die jetzt einfach die Gestalt

$$(21) \quad 0 \equiv \sigma \gamma^* \pmod{2}$$

annimmt.

Wird also die Anzahl c^* der accessorischen Primzahlen $= 1$ genommen, so ist überhaupt nur die eine Bedingung (21) zu befriedigen. Demgemäß erhält man im Falle $\sigma = 0$ bzw. $\sigma = 1$ stets ein Paar Simony-Knoten L_n , L'_n bzw. ein Paar Simony-Ketten L_n , L'_n ohne singuläre Primzahlen, wenn man $n = \pm p^*$ bzw. $n = \pm 2 p^*$ nimmt, hierbei unter p^* eine beliebige Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$ bzw. eine beliebige Primzahl $\equiv 1 \pmod{8}$ verstanden.

Wird aber $c^* > 1$ genommen, $h = c^* - 1$ gesetzt und werden die zu bestimmenden accessorischen Primzahlen mit $p_1^*, \dots, p_h^*, p_{h+1}^* = p^*$ bezeichnet, so kann wie in § 3, Nr. 13 verfahren werden: Es werden α^*, γ^* so gewählt, daß $\alpha^* + \gamma^* = c^*$ gilt und (21) erfüllt ist (was nur für γ^* und nur im Falle $\sigma = 1$ eine Beschränkung der Wahl bedeutet). Im Einklang mit dieser Bestimmung von α^*, γ^* werde für jede Primzahl p_v^* festgelegt, ob sie $\equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ gewählt werden soll. Dieser Festlegung entsprechend werden dann analog wie in Nr. 13 (vgl. Anm. 30) in einem ersten Schritt die Primzahlen $p_1^*, \dots, p_h^*$ „vorausgewählt“, worauf wie l. c. für die Bestimmung der „restierenden“ Primzahl p^* in einem zweiten Schritt des Verfahrens die Wahl aus $\frac{1}{2^h} \prod_{v=1}^{v=h} (p_v^* - 1)$ Restklassen mod. $8 p_1^* \dots p_h^*$ freisteht.

Beispielsweise werde $c^* = 2$, $h = 1$ genommen. Für $\sigma = 1$ (Simony-Ketten) gibt das für α^*, γ^* die Bedingungen $\gamma^* \equiv 0 \pmod{2}$, $\alpha^* + \gamma^* = 2$. Wir wählen etwa $\gamma^* = 0$, $\alpha^* = 2$, somit $p_1^* \equiv p^* \equiv 1 \pmod{8}$ und erhalten, wenn wir $p_1^* = 17$ wählen, gemäß (20) die Bedingung $1 \equiv \left(\frac{2}{p_1^*}\right)^\sigma \left(\frac{p^*}{p_1^*}\right) = \left(\frac{p^*}{17}\right)$, der — ebenso wie der Bedingung $p^* \equiv 1 \pmod{8}$ — z. B. durch die Primzahl $p^* = 89$ genügt wird, so daß $n = \pm 2 \cdot 17 \cdot 89 = \pm 3026$ auf ein Paar Simony-Ketten L_n , L'_n ohne singuläre Prim-

³³⁾ Ohne singuläre Primzahlen ist auch die Simony-Kette L_0 (vgl. Anm. 17). Übrigens sind L_1 und L'_1 , desgleichen L_2 und L'_2 topologisch nicht voneinander verschieden. Die Bezeichnungen Simony-„Kette“ bzw. Simony-„Knoten“ sind bei L_n für $n = 0$ bzw. $n = 1$ natürlich insofern unzutreffend, als L_0 unverkettet, L_1 unverknotet ist.

zahlen führt. Für $\sigma = 0$ (Simony-Knoten) dagegen wären α^* , γ^* nur an $\alpha^* + \gamma^* = c^* = 2$ gebunden, und wenn man $\alpha^* = \gamma^* = 1$, $p_1^* \equiv 5$, $p^* \equiv 1 \pmod{8}$ und speziell $p_1^* = 5$ wählt, dann ist gemäß (20) die Bedingung $\left(\frac{p^*}{5}\right) = 1$, also $p^* \equiv 1$ oder $4 \pmod{5}$, somit $p^* \equiv 1$ oder $9 \pmod{40}$ zu erfüllen, so daß z. B. $p^* = 41$, $n = \pm 5 \cdot 41 = \pm 205$ ein Paar Simony-Knoten L_n , L'_n ohne singuläre Primzahlen liefert.

18. Gruppentheoretische Betrachtungen ergeben bekanntlich, daß die Figur L_n für jedes $n > 1$ bei ungeradem n verknotet, bei geradem n verkettet ist, sowie daß sie für $n > 2$ allemal von ihrem Spiegelbild L'_n verschieden ist. Man mag, um die Tragweite der in vorliegender Note herangezogenen REIDEMEISTERSchen Methode am Beispiel der speziellen Simony-Figuren zu beurteilen, die Frage nach der Häufigkeit jener Werte n stellen, für welche zu L_n wenigstens eine singuläre Primzahl gehört; ebenso nach der Häufigkeit derjenigen Werte n , für welche die Menge der singulären Primzahlen von L_n verschieden ist von der entsprechenden Menge für L'_n , derart, daß aus der Betrachtung der singulären Primzahlen die topologische Verschiedenheit von L_n und L'_n erhellt (vgl. Nr. 1). Da es sich, wie die vorausgegangenen Entwicklungen zeigen, bei den Werten n , die eine dieser Forderungen erfüllen oder sie nicht erfüllen, stets um unendliche Mengen von Werten n handelt, so sind die erwähnten (übrigens im Wesen rein zahlentheoretischen) Häufigkeitsfragen im asymptotischen Sinn zu verstehen. So kann bezüglich der zuletzt erwähnten Häufigkeit zunächst folgende Frage gestellt werden: Was läßt sich über Vorhandensein bzw. Wert von $\lim \frac{A(N)}{N}$ sagen, wenn $A(N)$ die Anzahl derjenigen positiven Werte $n \leq N$ bedeutet, für welche L_n und L'_n in den singulären Primzahlen nicht übereinstimmen? Doch wollen wir uns mit der Erwähnung dieser Fragen bescheiden³⁴⁾.

³⁴⁾ Wegen einiger zahlenmäßiger Stichproben vgl. l. c.¹³⁾, Nr. 9, S. 61.

(Eingegangen am 6. Januar 1943.)

Über extremale Punktverteilungen in ebenen Gebieten.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Es bezeichne G ein ebenes, zusammenhängendes Gebiet mit dem JORDAN-schen Flächeninhalt F und der Randkurvenlänge L . Wir studieren nachfolgend Verteilungen V_n von n Punkten in G , wo die Punkte von V_n im Innern oder auf dem Rand von G liegen können. Für eine feste Verteilung V_n sei $d(V_n)$ die kleinste Distanz, die unter den $\binom{n}{2}$ Distanzen der Punktpaare von V_n festgestellt werden kann. Wir betrachten weiter die obere Schranke

$$(1) \quad d_n = \inf \sup d(V_n)$$

aller kleinsten Distanzen bei festem n bezogen auf die Menge aller Verteilungen V_n . Die Extremaldistanz d_n wird offenbar durch eine oder mehrere extremale V_n realisiert. Während der exakte Wert von d_n offensichtlich durch die Gestalt von G wesentlich beeinflusst wird, zeigt es sich, daß d_n in erster Näherung für große n als Funktion der Fläche F und der Randlänge L des Gebietes G dargestellt werden kann. In einer kürzlich erschienenen Note hat L. FEJES¹⁾ die asymptotische Relation

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} d_n = \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}}$$

nachgewiesen. Ziel dieser Arbeit ist es, für jedes endliche $n > 2$ eine Abschätzung für d_n nach oben und nach unten herzuleiten. Es gilt für $n > 2$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}n}} \leq d_n \leq \frac{\sqrt{3}L + \sqrt{3L^2 + 6(3\sqrt{3}n + 2\pi - 6\sqrt{3})F}}{3\sqrt{3}n + 2\pi - 6\sqrt{3}}.$$

Geeignete einfache Umrechnungen²⁾ ergeben noch

$$(4) \quad \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}} \leq \sqrt{n} d_n < \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}} + \frac{L + \sqrt{\sqrt{3}F}}{\sqrt{n}},$$

eine Abschätzung, aus der sich die Formel (2) von L. FEJES ergibt.

Zum Beweis der linksseitigen Ungleichung von (3) gehen wir von einer bekannten Mittelwertformel für bewegte Gebiete im Punktgitter aus, die darlegt, daß die mittlere Anzahl der vom Gebiet G bedeckten Gitterpunkte

1) L. FEJES, Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 83–85.

2) Es werden die Ungleichungen

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad n \geq 3, \quad \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{3\sqrt{3}} < 1$$

z. T. mehrmals verwendet.

im wesentlichen durch den Flächeninhalt F von G gegeben ist. Bezeichnet T den Flächeninhalt des Fundamentalparallelogramms des Punktgitters, $\bar{N}$ den mittleren Wert der Bedeckungszahl N von G im Gitter, so gilt³⁾

$$(5) \quad \bar{N} = \frac{F}{T}.$$

Wählen wir nun speziell ein rhombisches, $\frac{\pi}{3}$ -winkliges Punktgitter der Elementardistanz

$$(6) \quad a = \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}n}},$$

so wird

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{F}{n},$$

und somit

$$(7) \quad \bar{N} = n.$$

Da die größte in Betracht fallende Bedeckungszahl N gewiß nicht kleiner sein kann als der Mittelwert, wird es eine Lage von G geben, so daß $N \geq n$ ausfällt. Jedenfalls enthält dann G n Punkte des oben bezeichneten rhombischen Gitters, und für diese Punktverteilung V_n gilt offenbar

$$a \leq d(V_n),$$

so daß der erste Teil der Behauptung (3)

$$(8) \quad \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}n}} \leq d_n$$

unmittelbar folgt.

Wir wenden uns jetzt der rechtsseitigen Ungleichung von (3) zu. Der Nachweis wird sich leicht auf Grund zweier Feststellungen betreffend den Flächeninhalt der ϱ -Umgebung spezieller Punktmengen ergeben. Unter der ϱ -Umgebung einer ebenen Punktmenge verstehen wir die Vereinigungsmenge der offenen Kreise vom Radius ϱ , die um sämtliche Punkte der Menge (als Mittelpunkte) gelegt werden.

Zunächst kann folgende Feststellung gemacht werden:

Ist $\Phi(\varrho)$ der Flächeninhalt der ϱ -Umgebung des Gebietes G , so gilt die Ungleichung

$$(9) \quad \Phi(\varrho) \leq F + L\varrho + \pi\varrho^2.$$

³⁾ Vgl. die wesentlich allgemeinere Formel für Bewegung eines Gebietes in einem Gebietsgitter bei H. HADWIGER, Über Mittelwerte im Figurengitter. Comment. math. helv. 11 (1938/39), S. 221–233, bes. S. 223. Es handelt sich um eine Übertragung der Hauptformel der ebenen Integralgeometrie von W. BLASCHKE auf Figuren, welche eine Gruppe gestatten. Eine noch allgemeinere Formel gab L. A. SANTALÓ, Geometria integral de figuras ilimitadas. Publicaciones del instituto de matematicas (Rosario 1939), Vol. 1, Nr. 2.

Im Falle konvexer Gebiete gilt bekanntlich das Gleichheitszeichen und es handelt sich um die Formel von J. STEINER⁴⁾ für den Flächeninhalt sogenannter Parallelbereiche.

Die zweite Feststellung bezieht sich auf die ϱ -Umgebung einer endlichen Menge, deren Punkte einander nicht beliebig nahe kommen dürfen.

Es sei V_n eine Verteilung von n Punkten, von denen nicht zwei eine Entfernung $< d$ haben sollen, so daß $d(V_n) \geq d$ gilt. Es bezeichne $\chi(\varrho)$ den Flächeninhalt der ϱ -Umgebung der Punkte von V_n . Ist

$$(10) \quad d \leq 2\varrho \leq \sqrt{2}d,$$

und setzt man

$$(11) \quad d = 2\varrho \cos \theta,$$

so gilt für $n > 2$

$$(12) \quad \chi(\varrho) \geq \{n\pi - (3n - 6)(2\theta - \sin 2\theta)\} \varrho^2.$$

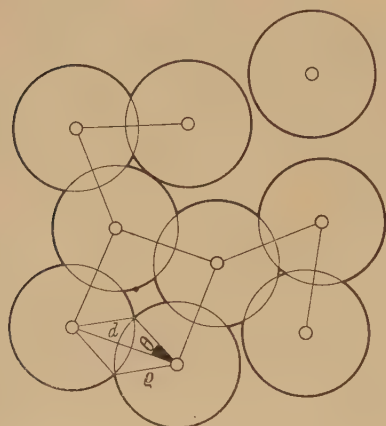


Fig. 1.

Wählt man in (11) speziell $d = \sqrt{3}\varrho$,

also $\theta = \frac{\pi}{6}$, so ergibt sich

$$(13) \quad \chi\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) \geq \left(\frac{3\sqrt{3}n + 4\pi - 6\sqrt{3}}{6}\right) d^2.$$

Den Nachweis für (12) bzw. (13) erbringen wir so: Wir verbinden zwei Punkte von V_n durch eine Strecke, wenn die um die beiden Punkte gezogenen Kreise vom Radius ϱ gemeinsame innere Punkte haben (vgl. hierzu die Figur).

Auf diese Weise entstehe ein Streckenkomplex mit n Punkten und s Strecken. Dieser Streckenkomplex liegt nun in der Ebene schlicht, d. h. zwei Strecken des Komplexes überschneiden sich nicht gegenseitig. Andernfalls müßten nämlich vier Punkte der Verteilung V_n ein konvexes Viereck bilden, dessen Diagonalen beide $< 2\varrho$, also mit Rücksicht auf (10) beide $< \sqrt{2}d$ wären, während die vier Seiten nach dem Distanzverbot alle $\geq d$ sein sollten, was mit einem elementar-geometrischen Sachverhalt im Widerspruch steht. Für einen schlichten Streckenkomplex auf einer Fläche vom Geschlecht Null gilt

$$(14) \quad s \leq 3n - 6 \quad (n > 2).$$

⁴⁾ J. STEINER gab die entsprechende Formel für dreidimensionale konvexe Gebiete: Über parallele Flächen. Monatsber. der Akad. d. Wiss. Berlin 1840, S. 114–118.

Dies kann so bewiesen werden, daß man zunächst geeignete nicht notwendig geradlinige „Strecken“ so hinzufügt, daß die Ebene in lauter „Dreiecke“ zerlegt wird (derjenige Teil, der den unendlich fernen Punkt der Ebene enthält, soll auch von drei Strecken berandet sein, und als Dreieck zählen). Der so erzeugte Streckenkomplex enthalte n Punkte, k Strecken und f Dreiecke. Nach dem EULERSchen Polyedersatz gilt dann⁵⁾ $n - k + f = 2$, und wegen $3f = 2k$ rechnet man $k = 3n - 6$, und schließt mit $s \leq k$ auf (14).

Wird nun zur Bildung der ϱ -Umgebung um jeden Punkt von V_n ein Kreis vom Radius ϱ gezogen, so enthält die entstehende Figur offenbar s Überdeckungssegmente benachbarter Kreise. Der Flächeninhalt eines derartigen Segmentes ist mit Rücksicht auf das Distanzverbot und auf Relation (11) nicht größer als $(2\theta - \sin 2\theta) \varrho^2$. So ergibt sich für den Flächeninhalt der ϱ -Umgebung der Punkte von V_n die Abschätzung

$$(15) \quad \chi(\varrho) \geq n\pi\varrho^2 - s(2\theta - \sin 2\theta)\varrho^2,$$

und wird jetzt noch (14) berücksichtigt, so erhält man (12).

Zum Beweise der rechtsseitigen Ungleichung von (3) gehen wir von einer beliebigen Verteilung V_n von n Punkten im Gebiet G aus, und setzen $d = d(V_n)$ (kleinste in V_n auftretende Distanz zweier Punkte). Da die ϱ -Umgebung der Punkte von V_n als Teil in der ϱ -Umgebung des Gebietes G enthalten ist, gilt mit der früher gewählten Bezeichnung für ihre Flächeninhalte die Beziehung

$$\chi(\varrho) \leq \Phi(\varrho).$$

Setzen wir speziell $\varrho = \frac{d}{\sqrt{3}}$, so sind die notwendigen Voraussetzungen für die Anwendung der Abschätzung (13) erfüllt, und mit gleichzeitiger Verwertung von (9) gewinnt man zunächst

$$\left(\frac{3\sqrt{3}n + 4\pi - 6\sqrt{3}}{6}\right)d^2 \leq F + \frac{L}{\sqrt{3}}d + \frac{\pi}{3}d^2,$$

oder

$$(16) \quad d \leq \frac{\sqrt{3}L + \sqrt{3L^2 + 6(3\sqrt{3}n + 2\pi - 6\sqrt{3})F}}{3\sqrt{3}n + 2\pi - 6\sqrt{3}}.$$

Da die Ungleichung (16) für jede Verteilung V_n Gültigkeit hat, kann d durch die obere Schranke d_n ersetzt werden. Damit ist der Beweis der in Frage stehenden Relation erbracht.

⁵⁾ Vgl. D. KÖNIG, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. S. 196.

Über gewisse trigonometrische Integrale. II.

Von

Hans Hornich in Wien.

In der ersten Mitteilung¹⁾ wurde, ausgehend von der charakteristischen Funktion eines Intervalls, durch iterierte Mittelbildungen eine Folge von Funktionen gebildet und deren Grenzverhalten untersucht. Für den Fall der Konvergenz sollen nun die Grenzfunktionen weiter untersucht werden. Man erhält dabei eine Klasse von Verteilungsfunktionen, die von unendlich vielen Konstanten abhängen; sie haben sehr viele Ähnlichkeit mit den GAUSSschen Funktionen — es gilt auch für sie der Faltungssatz —, sie enthalten aber die GAUSSschen Funktionen nicht. Dies ist bemerkenswert im Hinblick auf so viele Grenzsätze der Verteilungsfunktionen, die auf die GAUSSschen Funktionen hinführen.

Wir betrachten die trigonometrischen Integrale

$$(1) \quad \Psi(a_1, a_2, \dots; t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt \, dx,$$

wo die a_i eine Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ seien. Unter dieser Voraussetzung sind die Ψ nicht identisch verschwindende, unbeschränkt differenzierbare Funktionen von t und es ist

$$\begin{aligned} \Psi(a_1, a_2, \dots; t) &= \Psi(a_1, a_2, \dots; -t) \geq 0 \\ \Psi'(a_1, a_2, \dots; t) &\geq 0 \quad \text{für } t \leq 0, \end{aligned}$$

also

$$\Psi(a_1, a_2, \dots; 0) = \text{Max}_t \Psi(a_1, a_2, \dots; t).$$

Es ist ferner, und zwar gleichmäßig für alle t :

$$(2) \quad \Psi(a_1, a_2, \dots; t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(a_1, a_2, \dots, a_k; t);$$

dabei ist

$$\begin{aligned} \Psi_1(a_1; t) &= \frac{1}{a_1} \quad \text{für } |t| < \frac{a_1}{2}, \\ &= \frac{1}{2a_1} \quad \text{für } |t| = \frac{a_1}{2}, \\ &= 0 \quad \text{für } |t| > \frac{a_1}{2}, \end{aligned}$$

¹⁾ Math. Zeitschr. 48 (1942), S. 785.

und durch Mittelbildung

$$(3) \quad \Psi_{k+1}(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}; t) = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Psi_k(a_1, a_2, \dots, a_k; t + \tau) d\tau.$$

Für die Funktionen Ψ_k gilt der Faltungssatz:

$$(4) \quad \begin{aligned} \Psi_{i+k}(a_1, a_2, \dots, a_{i+k}; t) \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i(a_1, a_2, \dots, a_i; t - \tau) \Psi_k(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+k}; \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wir geben zunächst einige *Abschätzungen*.

Es ist für die ev. nur einseitig vorhandenen r -ten Ableitungen mit $r \leq k-1$

$$(5) \quad |\Psi_k^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_k; t)| \leq \frac{2^r}{a_1 a_2 \dots a_{r+1}}.$$

Man zeigt zunächst die Abschätzung für $k = r+1$; diese ist für $r = 0$ richtig und folgt durch Induktion für allgemeines r aus der k -fach differenzierten Formel (3). Für $k > r+1$ folgt die Abschätzung dann sofort etwa mit Hilfe von (3).

Aus (5) folgt dann ohne weiteres wegen der Konvergenz auch der Ableitungen

$$(6) \quad |\Psi^{(r)}(a_1, a_2, \dots; t)| \leq \frac{2^r}{a_1 a_2 \dots a_{r+1}}.$$

Wir können damit den *Konvergenzradius* $\varrho(t)$ einer eventuellen *Potenzreihenentwicklung* von Ψ abschätzen. Es ist

$$(7) \quad \varrho(t) \geq \frac{1}{2e} \lim_{k \rightarrow \infty} k \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}.$$

Für hinreichend schwach konvergente Summen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ ist dann Ψ sogar eine ganze analytische Funktion; z. B. für

$$a_i = i^{-\alpha} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Bei konvergenten $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist höchstens ein stückweise analytisches Verhalten von Ψ möglich, da dann ja für $|t| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ die Funktion Ψ identisch verschwindet.

Weiter ist für $r \leq k-4$

$$\begin{aligned} \Psi_k^{(r)}(a_1, \dots, a_k; t + \tau) - \Psi_k^{(r)}(a_1, \dots, a_k; t) \\ = \tau \Psi_k^{(r+1)}(a_1, \dots, a_k; t) + \frac{\tau^2}{2} \Psi_k^{(r+2)}(a_1, \dots, a_k; t + \vartheta \tau), \end{aligned}$$

woraus durch Integration nach τ von $-\frac{a_{k+1}}{2}$ bis $\frac{a_{k+1}}{2}$ mit Berücksichtigung von (3) und (5) folgt:

$$(8) \quad |\Psi_{k+1}^{(r)}(a_1, \dots, a_{k+1}; t) - \Psi_k^{(r)}(a_1, \dots, a_k; t)| \leq \frac{2^r a_{k+1}^2}{6 a_1 \dots a_{r+3}}$$

und durch Summation

$$(9) \quad |\Psi^{(r)}(a_1, \dots; t) - \Psi_k^{(r)}(a_1, \dots, a_k; t)| \leq \frac{2^r}{6 a_1 \dots a_{r+3}} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j}^2,$$

was wieder den Konvergenzsatz illustriert.

Wir betrachten die n -ten „Momente“:

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \Psi(a_1, a_2, \dots; t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir zeigen ihre Existenz und berechnen ihre Werte.

Sei zunächst $n = 2$. Es ist für jedes i :

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi_1(a_i; t) dt = \frac{a_i^3}{12}.$$

Nach dem Faltungssatz (4) ist für jedes ganze k :

$$\begin{aligned} (11) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi_{k+1}(a_1, \dots, a_{k+1}; t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau + \tau)^2 \Psi_k(a_1, \dots, a_k; t - \tau) \Psi_1(a_{k+1}; \tau) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \Psi_k(a_1, \dots, a_k; v) dv + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 \Psi_1(a_{k+1}; \tau) d\tau = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2. \end{aligned}$$

Es existiert also:

$$(12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi_k(a_1, a_2, \dots, a_k; t) dt = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

Sei $R > 0$, so ist auch

$$\int_{-R}^{+R} t^2 \Psi(a_1, a_2, \dots; t) dt + 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_R^{\infty} t^2 \Psi_k(a_1, a_2, \dots, a_k; t) dt = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

Das erste Integral ist mit wachsenden R monoton nicht abnehmend und beschränkt, also für $R \rightarrow \infty$ konvergent. Damit ist die Existenz des Integrals M_2 gezeigt und es ist:

$$(13) \quad M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Psi(a_1, a_2, \dots; t) dt = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2,$$

wobei rechts zunächst nur das Zeichen $\leq$ gilt. Unabhängig davon zeigen wir die Existenz und den Wert von

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(a_1, a_2, \dots; t) dt.$$

Es ist für ein $R > 0$ nach einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned} (14) \quad \int_0^R \Psi(a_1, a_2, \dots; t) dt &= R \Psi(2R, a_1, a_2, \dots; 0) \\ &= R \Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \dots, a_k; 0) + \\ &\quad + R [\Psi(2R, a_1, a_2, \dots; 0) - \Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \dots, a_k; 0)]. \end{aligned}$$

Nun ist nach (9)

$$R |\Psi(2R, a_1, a_2, \dots; 0) - \Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \dots, a_k; 0)| \leq \frac{1}{12} \frac{1}{a_1 a_2} \sum_{j=2}^{\infty} a_{k+j}^2,$$

also beliebig klein durch Wahl von k allein unabhängig von R .

Wählen wir, bei festem k , $2R > a_1 + a_2 + \dots + a_k$, so ist

$$\Psi_{k+1}(2R, a_1, a_2, \dots, a_k; 0) = \frac{1}{2R}$$

und es folgt für $R \rightarrow \infty$ aus (14)

$$(15) \quad M_0 = 1.$$

Wenden wir nun den Faltungssatz (4) und (11) auf die Funktion $\Psi(a_1, \dots; t)$ an, so folgt daraus die angegebene Formel (13).

Wir können daher die Integrale $\int_{-\infty}^t \Psi(a_1, a_2, \dots; \tau) d\tau$ als Verteilungsfunktionen ansehen.

Nun die allgemeinen Momente M_{2n} . Setzen wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \Psi_k(a_1, a_2, \dots, a_k; t) dt = M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_k),$$

so ist mit derselben Umformung wie bei $n = 1$ nach dem binomischen Satz

$$\begin{aligned} (16) \quad M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) &= M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \\ &+ \binom{2n}{2} M_{2n-2}(a_1, a_2, \dots, a_k) M_2(a_{k+1}) + \\ &+ \binom{2n}{4} M_{2n-4}(a_1, a_2, \dots, a_k) M_4(a_{k+1}) + \dots + M_{2n}(a_{k+1}); \end{aligned}$$

ferner ist

$$(17) \quad M_{2j}(a_{k+1}) = \frac{a_{k+1}^{2j}}{(2j+1) 2^{2j}}.$$

Daraus ergibt sich zunächst durch Induktion nach n , daß bei festem n die $M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ beschränkt sind; ferner daß die $M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_k)$

für $k \rightarrow \infty$ monoton wachsen, also konvergieren, und daß schließlich — genau wie bei $n = 1$ — auch M_{2n} existiert und

$$(18) \quad M_{2n} = \lim_{k \rightarrow \infty} M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Wenden wir die Formel (16) wiederholt an und setzen schließlich nach (17) ein, so wird

$$(19) \quad \begin{aligned} M_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_k) &= \sum \frac{(2n)!}{(2i_1)!(2i_2)!\dots(2i_k)!} M_{2i_1}(a_1) M_{2i_2}(a_2) \dots M_{2i_k}(a_k) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum \frac{(2n)!}{(2i_1+1)!(2i_2+1)!\dots(2i_k+1)!} a_1^{2i_1} a_2^{2i_2} \dots a_k^{2i_k}. \end{aligned}$$

Die Summe ist dabei über alle k -Tupel $(i_1 i_2 \dots i_k)$ ganzer Zahlen ≥ 0 mit $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$ zu erstrecken. Nach (18) folgt dann für $k \rightarrow \infty$:

Der Wert der Momente M_{2n} ist:

$$(20) \quad M_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum \frac{(2n)!}{(2i_1+1)!(2i_2+1)!\dots} a_1^{2i_1} a_2^{2i_2} \dots,$$

wo über alle Folgen ganzer Zahlen $(i_1 i_2 \dots)$ mit $i_j \geq 0$ und $i_1 + i_2 + \dots = n$ zu summieren ist.

Die angeschriebenen Produkte sind natürlich nur formal unendliche Produkte.

Die Momente ungerader Ordnung M_{2n+1} existieren gleichfalls sämtlich, ihr Wert ist stets Null.

Auf Grund der Existenz von M_0 können wir den *Faltungssatz* (4) ganz allgemein so formulieren:

Sind $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ zwei beliebige Zahlenfolgen, so ist

$$(21) \quad \Psi(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(a_1, a_2, \dots; t - \tau) \Psi(b_1, b_2, \dots; \tau) d\tau.$$

Der Satz (4) läßt sich als Spezialisierung dieses Satzes auffassen, wenn man für die verschwindenden a_i die betreffenden Quotienten $\frac{\sin a_i x}{a_i x}$ gleich 1 setzt.

Betrachten wir noch das Moment M_4 . Es ist

$$M_4 = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^4 + \frac{4!}{3!3!} \sum_{i < k} a_i^2 a_k^2 \right] = \frac{1}{48} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right)^2 - \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^4$$

und daher der Exzeß

$$(22) \quad \varepsilon = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = -\frac{6}{5} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^4}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right)^2};$$

der Exzeß ist also stets negativ.

Es ist daher nicht möglich, daß eine GAUSSsche Funktion $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2}$ durch ein Integral Ψ dargestellt wird; denn für jene Funktionen ist der Exzeß stets Null. Es lassen sich aber die GAUSSschen Funktionen als Limes einer Folge von Integralen Ψ_k — allerdings mit Konstanten a_i , die mit k sich ändern — darstellen: es ist etwa²⁾

$$(23) \quad \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6t^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^k \cos(2\sqrt{k} t x) dx \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}; t \right).$$

Wir zeigen, daß durch die Funktionen Ψ die Konstanten a_i eindeutig festgelegt werden:

Ist für zwei Folgen $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ von positiven Zahlen mit konvergenten Summen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ bei jedem t

$$(24) \quad \Psi(a_1, a_2, \dots; t) = \Psi(b_1, b_2, \dots; t),$$

so ist bei geeigneter Numerierung der a_i und b_i (etwa der Größe nach)

$$(25) \quad a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Aus (24) folgt

$$\Psi(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots; t) = \Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots; t) = \Psi(b_1, b_1, b_2, b_2, \dots; t)$$

und für $t = 0$:

$$\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin b_j x}{b_j x} dx = \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a_i x}{a_i^2 x^2} dx = \int_0^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin^2 b_j x}{b_j^2 x^2} dx.$$

In der SCHWARZschen Ungleichung

$$\left[\int_0^{\infty} f g dx \right]^2 \leq \int_0^{\infty} f^2 dx \cdot \int_0^{\infty} g^2 dx$$

kann aber das Gleichheitszeichen nur stehen, wenn $\lambda f = \mu g$ für zwei Konstante λ und μ ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$) gilt; es muß also

$$(26) \quad \lambda \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} = \mu \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin b_j x}{b_j x}$$

gelten, woraus für $x = 0$ $\lambda = \mu$ und durch Betrachtung der Nullstellen von (26) auch (25) folgt.

²⁾ Vgl. A. SOMMERFELD, Boltzmann-Festschrift 1904, S. 848–859; G. POLYA, Math. Annalen 74 (1913), S. 204–212.

Abschätzung des Fehlers bei der Tangentennäherungskonstruktion von Pirani.

Herrn FRIEDRICH PFEIFFER zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

Max Müller in Tübingen.

Die Tangente an eine Kurve $\mathfrak{K}$ in einem Punkte P kann sofort konstruiert werden, wenn ihre Richtung bekannt ist. Zur Auffindung der Tangentenrichtung hat M. VON PIRANI¹⁾ folgende Näherungskonstruktion angegeben: Man schlage um P einen Kreis mit nicht zu großem Radius a , der die Kurve $\mathfrak{K}$ in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet. Die Verbindungssehne dieser beiden Punkte hat (falls P_1 und P_2 sich in einer unten näher gekennzeichneten Lage befinden) angenähert die Richtung der Tangente von $\mathfrak{K}$ im Punkte P . Fragen, die mit der Genauigkeit der PIRANISCHEN Konstruktion zusammenhängen, haben schon A. WALTHER und TH. ZECH behandelt und mit einigen allgemeineren geometrischen Fragestellungen verknüpft²⁾. Hier soll die für den Praktiker wichtigste dieser Fragen eine besonders elementare und teilweise verschärfte Antwort finden.

1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir den Punkt P zum Nullpunkt des Koordinatensystems und die Kurventangente in P zur x -Achse machen. Dann hat die Kurve $\mathfrak{K}$ in der Nachbarschaft von P eine Darstellung $y = f(x)$. Die Funktion $f(x)$ sei in einem Intervall $|x| \leq X$ stetig. Wir wählen den Kreisradius a so klein, daß $0 < a \leq X$. Dann hat die Gleichung

$$G(x) \equiv x^2 + (f(x))^2 - a^2 = 0$$

mindestens eine Lösung x_1 mit $-a \leq x_1 < 0$ und mindestens eine Lösung x_2 mit $0 < x_2 \leq a$, denn es ist $G(x)$ stetig für $|x| \leq a$, $G(0) = -a^2 < 0$, $G(\pm a) = (f(\pm a))^2 \geq 0$. Irgend zwei solche Lösungen greifen wir heraus, die zugehörigen Schnittpunkte P_1 und P_2 des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ mit der Kurve $\mathfrak{K}$ haben die Koordinaten $(x_i, f(x_i))$ ($i = 1, 2$) und liegen auf verschiedenen Seiten der y -Achse, d. h. auf verschiedenen Seiten der Normalen

¹⁾ MARCELLO VON PIRANI, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Sammlung GÖSCHEN, Nr. 728, Berlin und Leipzig 1914, S. 24–28. 2. Auflage (besorgt von I. RUNGE), 1931, S. 22–27.

²⁾ A. WALTHER u. TH. ZECH, Bemerkungen zur angenäherten Tangentenkonstruktion von PIRANI. Berichte der math.-phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig 85 (1933), S. 45–56.

der Kurve $\mathfrak{K}$ im Punkte P . Ihre Verbindungsgerade nennen wir eine **PIRANISCHE** Sehne; deren Neigungswinkel gegenüber der positiven x -Achse bezeichnen wir mit $\delta = \delta(a)$.

Da die x -Achse Tangente der Kurve $y = f(x)$ im Punkte $(0, 0)$ sein soll, existiert $f'(0)$ und ist

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0^3);$$

also existiert auch

$$(1) \quad \text{fin sup}_{0 < |x| \leq u} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = S(u)$$

für $0 < u \leq X$ und ist

$$\lim_{u \rightarrow 0} S(u) = 0.$$

Es ist nach (1)

$$|f(x_i)| \leq S(a) |x_i| \quad (i = 1, 2)$$

und daher

$$|\text{tg } \delta| = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{x_2 - x_1} \leq S(a) \frac{|x_2| + |x_1|}{x_2 - x_1} \Rightarrow S(a) \frac{|x_2| + |x_1|}{|x_2| + |x_1|} = S(a),$$

also, wenn hier und im folgenden stets der Hauptwert des Arcustangens genommen wird,

$$(2) \quad |\delta| = |\arctg(\text{tg } \delta)| = \arctg(|\text{tg } \delta|) \leq \arctg(S(a))$$

und $\delta(a) \rightarrow 0$ für $a \rightarrow 0$.

Die **PIRANISCHEN** Sehnen existieren also für hinreichend kleine Kreisradien a und haben für $a \rightarrow 0$ stets die Tangente zur Grenzlage, falls diese existiert.

2. Hat $f(x)$ im Intervall $|x| \leq a$ eine beschränkte Ableitung und ist die obere Grenze von $|f'(x)|$ in diesem Intervall $M_1(a)$, so ist

$$f(x) = x f'(\vartheta_1 x) \quad (0 < \vartheta_1 = \vartheta_1(x) < 1)$$

und daher

$$S(a) = \text{fin sup}_{0 < |x| \leq a} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \text{fin sup}_{0 < |x| \leq a} |f'(\vartheta_1 x)| \leq M_1(a),$$

also nach (2)

$$|\delta| \leq \arctg(M_1(a)).$$

3. Hat $f(x)$ im Intervall $|x| \leq a$ eine beschränkte Ableitung zweiter Ordnung, ist etwa $|f''(x)| \leq M_2(a)$ für $|x| \leq a$, so ist

$$(3) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(\vartheta_2 x)}{2!} x^2 = \frac{1}{2} f''(\vartheta_2 x) x^2 \quad (0 < \vartheta_2 = \vartheta_2(x) < 1)$$

³⁾ Von Tangentendefinitionen, die nicht auf dem Begriff der Ableitung beruhen, sehen wir ab.

und damit

$$\begin{aligned} S(a) &= \operatorname{fin} \sup_{0 < |x| \leq a} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = \operatorname{fin} \sup_{0 < |x| \leq a} \left| x \frac{f''(\vartheta_2 x)}{2} \right| \\ &\leq \frac{a}{2} \operatorname{fin} \sup_{0 < |x| \leq a} |f''(\vartheta_2 x)| \leq \frac{a}{2} M_2(a), \end{aligned}$$

also nach (2)

$$|\delta| \leq \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{2} M_2(a) \right).$$

Dieses Ergebnis kann man auch durch folgende einfache geometrische Betrachtung gewinnen: Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen verläuft im Intervall $|x| \leq a$ die Kurve $\mathfrak{K}$ zwischen den Parabeln $y = Lx^2$ und $y = -Lx^2$, wo zur Abkürzung $L = \frac{1}{2} M_2(a)$ gesetzt ist, d. h. im Bereich

$$-Lx^2 \leq y \leq Lx^2.$$

Die Winkelabweichung $|\delta|$ der PIRANISCHEN Sehne wird also am größten, wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ zwei diametral gelegene Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ mit diesen Parabeln verbindet und die PIRANISCHE Sehne durch diese Punkte gelegt wird. Ist (ξ, η) der im ersten Quadranten gelegene dieser Schnittpunkte, also

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2, \quad \eta = L \xi^2,$$

und zunächst $L > 0$, so wird

$$\xi^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 L^2}}{2L^2};$$

also ist

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg} \delta| &\leq \frac{\eta}{\xi} = L \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 L^2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + 1 + 2a^2 L^2} = aL = \frac{1}{2} a M_2(a), \end{aligned}$$

d. h.

$$|\delta| \leq \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{2} M_2(a) \right).$$

Diese Abschätzung gilt nachträglich auch noch, falls $L = \frac{1}{2} M_2(a) = 0$ ist.

4. Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, daß im Intervall $|x| \leq a$ mindestens die zweite Ableitung existiert und auch noch an der Stelle $x = 0$ stetig ist. Dann ist nach (3)

$$f(x) = x^2 \frac{f''(\vartheta_2(x)x)}{2} = x^2 g(x),$$

wo $g(x)$ für $|x| \leq a$ stetig ist, falls $g(0) = \frac{1}{2} f''(0)$ gesetzt wird. Setzt man zur Abkürzung $g(x_i) = g_i$ und nimmt man zunächst $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ an, so folgt aus der Bedingung

$$x_i^2 + x_i^4 g_i^2 - a^2 = 0,$$

daß

$$(4) \quad x_i^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_i^2}}{2g_i^2} \quad (i = 1, 2).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 g_2 - x_1^3 g_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|g_1 g_2|}{|g_1|} \frac{g_2 - g_1 + g_1 \sqrt{1 + 4a^2 g_2^2} - g_2 \sqrt{1 + 4a^2 g_1^2}}{\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_2^2}} + |g_2| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_1^2}}}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(5) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} a \frac{|g_1 g_2|}{g_1 g_2} (g(x_2) - g(x_1)) F(2ag_1, 2ag_2),$$

wo

$$F(t_1, t_2) = \frac{1 + \frac{t_1 \sqrt{1 + t_2^2} - t_2 \sqrt{1 + t_1^2}}{t_2 - t_1}}{|t_1| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t_2^2}} + |t_2| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t_1^2}}}$$

ist. Die Formel (5) gilt nach ihrer Herleitung nur, sofern $g_1 \neq g_2$ ist. Wir werden in Nr. 5 zeigen, daß es eine Konstante C derart gibt, daß

$$(6) \quad |F(t_1, t_2)| \leq C$$

für $0 < |t_1| < \infty$, $0 < |t_2| < \infty$, $t_1 \neq t_2$, und zugleich finden, daß $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ die kleinste derartige Konstante ist. Damit folgt dann aus (5), daß

$$(7) \quad |\operatorname{tg} \delta| \leq \frac{1}{2} a |g(x_2) - g(x_1)|.$$

Diese Ungleichung gilt nun aber auch in dem bisher ausgeschlossenen Fall, daß $g_1 = g_2$ ist; dann ist nämlich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= g_1(x_2 + x_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_1}{|g_1|} \left\{ \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_1^2}} - \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_1^2}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

also (7) auch richtig.

5. Wir beweisen jetzt, daß die Ungleichung (6), d. h. die Ungleichung

$$(8) \quad \left| 1 + \frac{t_1 \sqrt{1 + t_2^2} - t_2 \sqrt{1 + t_1^2}}{t_2 - t_1} \right| \leq C \left\{ |t_1| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t_2^2}} + |t_2| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t_1^2}} \right\}$$

für $0 < |t_1| < \infty$, $0 < |t_2| < \infty$, $t_1 \neq t_2$ mit $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gilt, C aber nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden darf.

Setzt man

$$u_i = \sqrt{-t_i + \sqrt{1 + t_i^2}} \quad (i = 1, 2),$$

so entspricht dem Bereich $0 < |t_i| < \infty$ der Bereich $0 < u_i < \infty$, $u_i \neq 1$; es wird

$$t_i = \frac{1 - u_i^4}{2 u_i^3}, \quad \sqrt{1 + t_i^2} = \frac{1 + u_i^4}{2 u_i^3}, \quad \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t_i^2}} = \frac{|1 - u_i^2|}{\sqrt{2} |u_i|};$$

der Bedingung $t_1 \neq t_2$ entspricht die Bedingung $u_1 \neq u_2$; der Ungleichung (8) entspricht die Ungleichung

$$\left| \frac{(1 - u_1^3)(1 - u_2^3)}{1 + u_1^3 u_2^3} \right| \leq \frac{C}{2\sqrt{2}} \frac{|1 - u_1^2| |1 - u_2^2|}{|u_1 u_2|} \left\{ \frac{1 + u_1^2}{|u_1|} + \frac{1 + u_2^2}{|u_2|} \right\}$$

oder

$$\frac{u_1^3 u_2^3}{1 + u_1^3 u_2^3} \leq \frac{C}{2\sqrt{2}} \{ (1 + u_1^2) |u_2| + (1 + u_2^2) |u_1| \},$$

die, weil $u_i > 0$ ist, auch

$$\frac{u_1^3 u_2^3}{1 + u_1^3 u_2^3} \leq \frac{C}{2\sqrt{2}} \{ (1 + u_1^2) u_2 + (1 + u_2^2) u_1 \} = \frac{C}{2\sqrt{2}} (u_1 + u_2) (1 + u_1 u_2)$$

geschrieben werden darf. Es ist also gewiß die Ungleichung (6) bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß

$$\Phi(u_1, u_2) = \frac{C}{2\sqrt{2}} (u_1 + u_2) (1 + u_1 u_2) - \frac{u_1^3 u_2^3}{1 + u_1^3 u_2^3} \geq 0$$

für $0 < u_i < \infty$ und $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Da $\Phi(u_1, u_2) = \Phi(u_2, u_1)$ ist, genügt es, bei diesem Nachweis $0 < u_2 \leq u_1 < \infty$ vorauszusetzen. Längs der Hyperbeln $u_1 u_2 = k$, soweit sie in diesem Bereich verlaufen, ist

$$\Phi = \Phi\left(u_1, \frac{k}{u_1}\right) = \frac{C}{2\sqrt{2}} \left(u_1 + \frac{k}{u_1}\right) (1 + k) - \frac{k^3}{1 + k^3} = h(u_1),$$

$$0 < k < \infty, \quad \sqrt{k} \leq u_1 < \infty,$$

$$h'(u_1) = \frac{C}{2\sqrt{2}} (1 + k) \left(1 - \frac{k}{u_1^2}\right) \geq 0,$$

$$\Phi\left(u_1, \frac{k}{u_1}\right) \geq \Phi(\sqrt{k}, \sqrt{k}).$$

Wenn also $\Phi(v, v) \geq 0$ für $0 < v < \infty$ und bei geeigneter Wahl der Konstanten C , so ist auch $\Phi(u_1, u_2) \geq 0$ für $0 < u_1 < \infty$, $0 < u_2 < \infty$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \Phi(v, v) &= \frac{C}{\sqrt{2}} v (1 + v^2) - \frac{v^4}{1 + v^4} = \frac{C v}{\sqrt{2} (1 + v^4)} \left[(1 + v^2) (1 + v^4) - \frac{\sqrt{2}}{C} v^3 \right] \\ &= \frac{C v}{\sqrt{2} (1 + v^4)} l(v). \end{aligned}$$

Es ist also zu zeigen, daß

$$l(v) = (1 + v^2) (1 + v^4) - \frac{\sqrt{2}}{C} v^3 = 1 + v^2 + v^4 + v^6 - \frac{\sqrt{2}}{C} v^3 \geq 0$$

für $0 < v < \infty$, wenn $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gesetzt wird. Für $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ wird aber

$$l(v) = (v-1)^2(1+2v+4v^2+2v^3+v^4),$$

also in der Tat $l(v) \geq 0$ für $0 < v < \infty$. Wird dagegen $C < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gewählt, so wird

$$l(1) = 4 - \frac{\sqrt{2}}{C} < 4 - 4 = 0;$$

mithin ist $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ auch die kleinste Konstante, mit der die Ungleichung (6) für $0 < |t_1| < \infty$, $0 < |t_2| < \infty$, $t_1 \neq t_2$ gilt.

6. Nun sei $g_1 = 0$, aber $g_2 \neq 0$. Dann ist $x_1 = -a$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{x_2^3 g_2}{x_2 + a} \\ &= 2a \frac{|g_2|}{g_2} |g_2| \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_2^2}}{\sqrt{2} 2a |g_2| \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 g_2^2} + 4a^2 g_2^2}}, \end{aligned}$$

d. h.

$$(9) \quad \operatorname{tg} \delta = 2a \frac{|g_2|}{g_2} |g_2| F(2a |g_2|),$$

wo

$$F(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{2} t \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t^2} + t^2}}.$$

Wir wollen zeigen, daß es eine Konstante D derart gibt, daß

$$(10) \quad |F(t)| \leq D$$

für $0 < t < \infty$, und daß $D = \frac{1}{4}$ die kleinste derartige Konstante ist.

Die Ungleichung (10) oder

$$|-1 + \sqrt{1 + t^2}| \leq D \{ \sqrt{2} t \sqrt{-1 + \sqrt{1 + t^2} + t^2} \}$$

geht durch die Substitution

$$u = \sqrt{-t + \sqrt{1 + t^2}}$$

in die gleichwertige Ungleichung

$$\frac{(1-u^2)^2}{2u^2} \leq D \left\{ \sqrt{2} \frac{1-u^4}{2u^2} \frac{|1-u^2|}{\sqrt{2}|u|} + \frac{(1-u^4)^2}{4u^4} \right\}$$

über, die für $0 < u < 1$ zu beweisen ist und für diese u auch

$$2u^2 \leq D(1+u^2)(1+u)^2$$

geschrieben werden darf. Es ist also D möglichst klein und so zu bestimmen, daß im Intervall $0 < u < 1$

$$p(u) = 1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + u^4 - \frac{2}{D}u^2 \geq 0$$

bleibt. Für $D = \frac{1}{4}$ wird nun

$$p(u) = (u-1)^2(1+4u+u^2) \geq 0,$$

für $D < \frac{1}{4}$ aber

$$p(1) = 8 - \frac{2}{D} < 8 - 8 = 0.$$

Damit ist die Ungleichung (10) im behaupteten Umfang bewiesen.

Aus (9) und (10) folgt, daß

$$|\operatorname{tg} \delta| \leq \frac{1}{2} a |g(x_2)| = \frac{1}{2} a |g(x_2) - g(x_1)|;$$

es gilt also wieder die Ungleichung (7). Ganz entsprechend läßt sie sich begründen, wenn $g_2 = 0$, aber $g_1 \neq 0$ ist. Im Falle $g_1 = g_2 = 0$ ist sie endlich trivialerweise richtig, weil dann $\operatorname{tg} \delta = 0$ ist. Die Ungleichung (7) gilt also ausnahmslos.

7. Wir gehen zu Folgerungen über. Ist $|f''(x)| \leq M_2(a)$ für $|x| \leq a$, so ist $|g(x)| \leq \frac{1}{2} M_2(a)$, und aus (7) folgt, daß

$$|\operatorname{tg} \delta| \leq \frac{1}{2} a M_2(a),$$

d. h.

$$|\delta| \leq \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} a M_2(a) \right),$$

also das Ergebnis aus Nr. 3.

Ist $|f''(x) - f''(0)| \leq S_2(a)$ für $|x| \leq a$, so ist

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq |g(x_2) - g(0)| + |g(x_1) - g(0)| \leq S_2(a)$$

und daher nach (7)

$$|\operatorname{tg} \delta| \leq \frac{1}{2} a S_2(a).$$

Ist $f''(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig, so ist $S_2(a) \rightarrow 0$ für $a \rightarrow 0$, mithin

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \delta(a)}{a} = 0$$

und erst recht

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\delta(a)}{a} = 0.$$

Hat $f(x)$ im Intervall $|x| \leq a$ sogar eine beschränkte Ableitung dritter Ordnung, und ist für $|x| \leq a$

$$|f'''(x)| \leq M_3(a),$$

so ist

$$g(x) = \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(\vartheta_3 x)}{3!} x \quad (0 < \vartheta_3 = \vartheta_3(x) < 1),$$

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{6} [x_2 f'''(\vartheta_3(x_2)x_2) - x_1 f'''(\vartheta_3(x_1)x_1)],$$

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq \frac{1}{3} a M_3(a),$$

$$|\operatorname{tg} \delta| \leq \frac{1}{3!} a^2 M_3(a),$$

(11)

$$|\delta| \leq \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3!} a^2 M_3(a) \right).$$

8. Eine noch schärfere Aussage läßt sich, wie in Nr. 9 durch ein Beispiel belegt werden wird, im allgemeinen nicht erzielen. Wenn aber $f(x)$ sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar und

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0, \quad f^{(n+1)}(0) \neq 0 \quad (n \geq 3)$$

ist, ferner für $|x| \leq a$ die Ungleichung

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}(a)$$

gilt, wenn also der Punkt P ein Flachpunkt n -ter Ordnung ist, so wird

$$g(x) = \frac{x^{n-1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta_{n+1}(x)x) \quad (0 < \vartheta_{n+1}(x) < 1),$$

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq |g(x_2)| + |g(x_1)| \leq 2 \frac{a^{n-1}}{(n+1)!} M_{n+1}(a),$$

$$|\operatorname{tg} \delta| \leq \frac{a^n}{(n+1)!} M_{n+1}(a),$$

$$(12) \quad |\delta| \leq \operatorname{arctg} \left(\frac{a^n}{(n+1)!} M_{n+1}(a) \right).$$

Für die Konstruktion der Tangente in einem Flachpunkt ist also, worauf schon Herr PIRANI hinwies und was die praktische Erfahrung bestätigt, die PIRANISCHE Konstruktion besonders vorteilhaft.

9. Davon, daß die Ungleichungen (11) und (12) im allgemeinen nicht verschärft werden können, kann man sich an folgendem Beispiel überzeugen: Ist die Kurve $\mathfrak{K}$ die Parabel

$$f(x) = Kx^{n+1} \quad (K > 0, n \text{ eine positive gerade Zahl}),$$

so wird

$$\operatorname{tg} \delta = K \frac{x_2^{n+1}}{x_2} = Kx_2^n,$$

$$g(x) = Kx^{n-1} \neq 0 \quad \text{für } x \neq 0,$$

also $g_2 = Kx_2^{n-1} \neq 0$ und, wenn θ eine Konstante zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bedeutet und

$$0 < X \leq \sqrt[n]{\frac{\theta}{2K}}$$

gewählt wird,

$$|g_2| < Ka^{n-1} \leq KX^{n-1},$$

$$2a|g_2| < 2XKX^{n-1} \leq \theta < 1,$$

daher nach (4)

$$x_2 = a \sqrt{1 - \frac{1}{4}(2ag_2)^2 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6}(2ag_2)^4 - \dots} = a\sqrt{1 + \varphi(a)},$$

$$\operatorname{tg} \delta = Ka^n \sqrt{1 + \varphi(a)}^n.$$

Hier ist bei unseren Voraussetzungen

$$|\varphi(a)| = \left| -\frac{1}{4}(2ag_2)^2 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6}(2ag_2)^4 - \dots \right| \leq (2ag_2)^2 + (2ag_2)^4 + \dots \\ < (2aKa^{n-1})^2 + (2aKa^{n-1})^4 + \dots = (2K)^2 a^{2n} + (2K)^4 a^{4n} + \dots$$

Diese letzte Potenzreihe in a ist für $a \leq X$ konvergent, weil

$$2Ka^n \leq 2KX^n \leq \Theta < 1.$$

Daher ist

$$\lim_{a \rightarrow 0} \varphi(a) = 0$$

und damit

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \delta}{a^n} = K = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.$$

Die Abschätzung (11) kann also, was die Größenordnung betrifft, mit der a in die Fehlerschranke eingeht, nicht allgemein verschärft werden⁴⁾; dasselbe lehrt das Beispiel von der Ungleichung (12), solange man darauf verzichtet, zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden.

⁴⁾ Dies kann man auch der Potenzreihe entnehmen, die δ als Funktion von a darstellt; vgl. A. WALTHER und TH. ZECH a. in Anm. ²⁾ a. O., S. 51, Formel (3).

(Eingegangen am 5. März 1943.)

Über Nabelpunkte auf einer Eifläche.

Von G. Bol in Greifswald.

Herr CARATHÉODORY hat bekanntlich¹⁾ die Vermutung ausgesprochen, daß es auf jeder konvexen Fläche mindestens zwei Nabelpunkte gibt. Diese Vermutung ist unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (vgl. § 1) von H. HAMBURGER bewiesen worden²⁾, leider aber in so umständlicher Weise, daß von einem wirklichen Durchschauen der Verhältnisse, wie mir scheint, nicht die Rede sein kann.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, diesem Ziele näherzukommen. Durch Anwendung mehr geometrischer Methoden wird eine sehr erhebliche Vereinfachung und Veranschaulichung erreicht. Dieselbe Methode läßt sich — worauf hier nur hingewiesen werden soll — auch bei anderen Fragen über Nabelpunkte mit Erfolg verwenden. Besonders die Ergebnisse von GULLSTRAND³⁾ über die Gestalt des Krümmungsliniennetzes in der Umgebung eines Nabels lassen sich in einfacher Weise wiedergewinnen und erweitern. Darüber soll die demnächst in Hamburg erscheinende Doktorarbeit von Fr. I. ELVERS Aufschluß geben. Ich hoffe aber, die gesamten Ergebnisse bald auch in mehr lehrbuchmäßiger Form herausbringen zu können⁴⁾.

§ 1.

Zurückführung auf ein lokales Problem.

Erinnern wir zunächst daran, wie man unser Problem auf eine Frage nach dem Verhalten des Krümmungsliniennetzes in der Umgebung eines Nabels zurückführen kann.

¹⁾ Vgl. W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, S. 289. Der dort erwähnte Beweis von COHN-VOSSEN, der mir nicht zugänglich war, hat sich, wie mir Herr BLASCHKE mitteilt, als falsch erwiesen.

²⁾ H. HAMBURGER, Beweis einer Vermutung von C. CARATHÉODORY. I, *Annals of Math.*; II s. 41 (1940), S. 63–86; II, III, *Acta Mathematica* 73 (1941), S. 174–332.

³⁾ A. GULLSTRAND, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. *Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsala* Ser. III, 20 (1900), S. 1–204; Zur Theorie der Kreispunkte. *Acta Math.* 29 (1904), S. 59–100.

⁴⁾ Ein ausführliches Literaturverzeichnis über Nabelpunkte bei H. J. FISCHER, Der Verlauf von Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes. *Deutsche Mathematik* 3 (1938), S. 152–188.

Unter Verwendung der Ebenenkoordinaten von BONNET⁵⁾ läßt sich unsere Fläche darstellen mit Hilfe einer Funktion

$$(1) \quad w = w(u, v)$$

zweier Veränderlichen u und v , die für reelle Flächenpunkte konjugiert komplex sind, während w für reelle Flächenpunkte reell ist. Die Gleichung der Krümmungslinien nimmt in diesen Koordinaten die Form an:

$$(2) \quad w_{uu} du^2 - w_{vv} dv^2 = 0.$$

Die Nabelpunkte sind gekennzeichnet durch

$$(3) \quad w_{uu} = w_{vv} = 0.$$

Für reelle Flächenpunkte sind w_{uu} und w_{vv} konjugiert komplex, ein solcher Punkt ist also genau dann ein Nabel, wenn w_{uu} verschwindet.

Bekanntlich ist die Ebene der komplexen Veränderlichen u zum sphärischen Normalenbild unserer Fläche konform. Da die sphärischen Bilder der Krümmungslinien ein orthogonales Kurvennetz bilden, gilt dasselbe für das Abbild der Krümmungslinien in der u -Ebene.

Bei einer Eifläche ist die Abbildung der Fläche auf die Normalenbildkugel sowie auf die u -Ebene eineindeutig, es ist also gleichgültig, ob wir das Netz der Krümmungslinien auf der Fläche, im sphärischen Bild oder in der u -Ebene untersuchen.

Sei nun $u = v = 0$ ein Nabelpunkt, den wir isoliert voraussetzen, so daß in einer Umgebung des Nullpunktes kein weiterer Nabel mehr vorhanden sein soll, also w_{uu} nirgendwo verschwinden soll. Beschreiben wir in dieser Umgebung einen Umlauf im positiven Sinne um den Nullpunkt, so wird

$$(4) \quad \Delta \arg w_{uu} = 2N\pi$$

bei ganzem N . N nennt man die Kennziffer des Nabels.

Für eine Eifläche mit nur isolierten Nabeln ist, wie a. a. O.¹⁾ gezeigt wird,

$$(5) \quad \sum N_i = -4.$$

Daraus folgt zunächst, daß es auf jeder Eifläche mindestens einen Nabel gibt. Im folgenden soll aber mit H. HAMBURGER bewiesen werden:

Hauptsatz. Wenn sich w in einer Umgebung eines isolierten Nabels in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln läßt, so gilt für die Kennziffer dieses Nabels

$$(6) \quad N \geq -2.$$

⁵⁾ O. BONNET, Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes. Journ. de Liouville, 2 série, 5 (1860), S. 153–266. Vgl. auch G. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces I, S. 243 und W. BLASCHKE, Differentialgeometrie III, S. 285.

Daraus ergibt sich offenbar sofort die Richtigkeit der Vermutung von CARATHÉODORY, und zwar in folgender Präzisierung:

Wenn es auf einer Eifläche einen Nabel gibt, in dessen Umgebung sich w in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln läßt⁶⁾ so liegt auf dieser Fläche noch mindestens ein weiterer Nabel.

Setzen wir

$$(7) \quad w_{uu} = x + iy$$

mit reellen x und y und durchläuft u eine geschlossene Kurve um den Nullpunkt, so beschreibt der Punkt (x, y) eine geschlossene Kurve K in der (x, y) -Ebene. Ist nun N_+ die Anzahl der Durchschnitten dieser Kurve mit der positiven x -Achse im positiven Sinne, N_- die Anzahl der Durchschnitten im negativen Sinne, so wird offenbar

$$(8) \quad N = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg w_{uu} = N_+ - N_-.$$

Das wird sofort klar, wenn man sich die RIEMANNSche Fläche für $\log w_{uu}$ durch Aufschneiden und Zusammenheften längs der positiven x -Achse hergestellt denkt. Natürlich kann man statt der positiven x -Achse auch jeden anderen Halbstrahl durch den Nullpunkt verwenden.

Offenbar ist N aber auch die Anzahl der Umläufe um den Nullpunkt, auf die sich unsere Kurve ohne Durchschreitung des Nullpunktes stetig zusammenziehen läßt. Wir wollen also N auch die Umlaufszahl unserer Kurve um den Nullpunkt nennen. Man spricht auch von KRONECKERS Charakteristik des Nullpunktes in bezug auf die Kurve K .

Unser Hauptsatz läßt sich jetzt so formulieren:

Die Funktion $w(u, v)$ möge für konjugiert komplexe u, v nur reelle Werte annehmen, in einer Umgebung des Nullpunktes $u = v = 0$ lasse sich w in eine Potenzreihe nach u und v entwickeln:

$$(8) \quad w(u, v) = \sum_{i,k}^{\infty} a_{ik} u^i v^k, \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki}.$$

Es sei $w_{uu}(0, 0) = 0$, diese Nullstelle von w_{uu} sei aber isoliert. Beschreibt dann u einen Umlauf um den Nullpunkt im positiven Sinne, der keine weitere Nullstelle von w_{uu} enthält, so ist die Umlaufszahl der durch (7) erklärten Kurve in der (x, y) -Ebene nicht kleiner als -2 .

Durch diese Formulierung wird es verständlich, daß die Bestimmung der Umlaufszahlen für gewisse Kurvenklassen im folgenden einen wichtigen

⁶⁾ In vielen Fällen kommt man mit weniger aus, so genügen wenige Glieder der Taylor-Formel, wenn in (9) das erste nicht identisch verschwindende Glied keine vierfache Nullstelle mit konjugiert komplexen u und v und $|u| = 1$ hat. Vgl. hierzu die Schlußbemerkung in § 6.

Platz einnimmt. Diese Untersuchungen, die mir auch für sich von Interesse zu sein scheinen, sind in § 2 zusammengestellt.

Die Umlaufszahl hat eine wichtige Additivitätseigenschaft; verbinden wir zwei Punkte A und C des geschlossenen Kurvenzuges $ABCD A$ durch den Bogen AEC , so ist (Fig. 1)

$$N_{ABCD A} = N_{ABCE A} + N_{AECDA},$$

wobei natürlich alle Umlaufszahlen in bezug auf denselben Punkt genommen werden sollen. Daß dies richtig ist, sieht man sofort aus (8); die Bestandteile, die von dem neuen Bogen AEC herrühren, heben sich heraus.

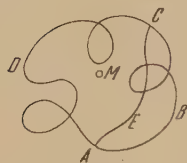


Fig. 1.

Da w_{uu} im Nullpunkt verschwindet, ist offenbar $a_{20} = a_{02} = 0$. Weil unsere Untersuchung sich ausschließlich auf w_{uu} bezieht, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch $a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} = 0$ voraussetzen. Dann wird

$$(9) \quad w(u, v) = \sum_{h=3}^{\infty} w_h(u, v),$$

wo $w_h(u, v)$ ein homogenes Polynom der Ordnung h in u und v darstellt, das für konjugiert komplexe u und v nur reelle Werte annimmt.

Ist $w_k(u, v)$ das erste Glied in der Entwicklung (9), das nicht identisch verschwindet, so spricht man von einem Nabel der Ordnung $k - 2$ ⁷⁾.

§ 2.

Umlaufszahlen.

Satz I. $f(t)$ sei zweimal stetig differenzierbar und periodisch mit Periode 2π , A sei eine positive Konstante. Dann hat die Kurve

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= f'' - Af, \\ y &= f' \end{aligned}$$

in bezug auf jeden Punkt $M(x_0, y_0)$ in ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.

Zum Beweis sei zunächst $y_0 \leq 0$. Wir bestimmen die Umlaufszahl mit Hilfe der Parallelen zur positiven x -Achse durch M . Sei nun P eine Durchschneidung dieser Halbgeraden im negativen Sinne, also bei abnehmendem y

⁷⁾ Nach GULLSTRAND; die einfachsten Nabel mit $k = 3$ sind dann von erster Ordnung.

(Fig. 2). Wir behaupten dann, daß der nächste Punkt Q auf unserer Kurve, für den der Wert $y = y_0$ (im zunehmenden Sinne) wieder durchschritten wird, rechts von P liegt, also eine Durchschneidung der Halbgeraden im positiven Sinne darstellt. Ist das bewiesen, so ist man fertig, denn wenn auf jede Durchschneidung im negativen Sinne eine im positiven Sinne folgt, so ist $N_+ \geq N_-$, also $N \geq 0$.

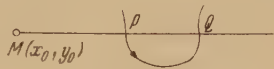


Fig. 2.

Der Beweis ist aber sehr einfach, gehören zu P und Q die Parameterwerte t_P und t_Q , so ist für $t_P \leq t \leq t_Q$ stets $y \leq y_0$, also $f'(t) \leq y_0$ und daher

$$(11) \quad f(t_Q) - f(t_P) \leq y_0(t_Q - t_P)$$

und weiter

$$(12) \quad f'(t_P) = f'(t_Q) = y_0, \quad f''(t_P) \leq 0, \quad f''(t_Q) \geq 0.$$

Daher aber

$$x_Q - x_P = f''(t_Q) - f''(t_P) - A \{f(t_Q) - f(t_P)\} > 0$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist aber $y_0 > 0$, so setzen wir

$$(13) \quad x^* = -x, \quad y^* = -y, \quad f^* = -f.$$

Die Substitution bedeutet eine Drehung des Achsenkreuzes um π , was an der Umlaufszahl nichts ändert.

Dann gilt für die gesterntten Größen wieder (10), es ist aber $y_0^* < 0$. Also ist auch hier die Behauptung richtig.

Setzt man in (10) für $f(t)$ ein Polynom in t und läßt t von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so wird die Kurve nicht geschlossen sein, sondern aus dem Unendlichen kommen und dorthin wieder weglauen. Es ist aber klar, daß sie jeden genügend großen Kreis um M nur zweimal trifft und wir können sie geschlossen machen, indem wir die Teile außerhalb des Kreises weglassen und dann Endpunkt und Anfangspunkt durch einen der beiden Kreisbogen verbinden. Wir wählen dafür den Bogen, der im positiven Sinne durchlaufen werden muß (Fig. 3).

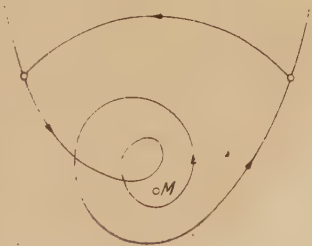


Fig. 3.

Dann bleiben sämtliche Schlüsse richtig und die Umlaufszahl ist wieder nicht negativ. Hierbei ist allerdings der letzte Schnittpunkt unserer Kurve (10) mit dem Halbstrahl gesondert zu betrachten. Durchschneidet hier nämlich die Kurve im negativen Sinne, so ist noch zu zeigen, daß der nächste Schnittpunkt der abgeänderten Kurve ein solcher im positiven Sinne ist. Das ist klar, wenn der Kreisbogen die x -Achse

trifft. Es bleibt also nur noch der Fall zu betrachten, daß (in verständlicher Bezeichnung)

$$(14) \quad f'(-\infty) < y_0, \quad f'(+\infty) < y_0.$$

Ist nun

$$(15) \quad f(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k,$$

so tritt offenbar (14) nur dann ein, wenn $a_0 < 0$ und k ungerade ist. Dann wird aber

$$x = -A a_0 t^k + \dots$$

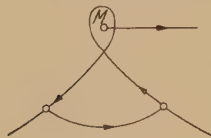


Fig. 4.

und unsere Kurve kommt also aus dem dritten und läuft in das vierte Quadrant. Daher trifft auch jetzt der Kreisbogen unseren Halbstrahl und n kann nicht negativ werden.

Daß aber Vorsicht am Platze ist, sieht man an der Kurve der Fig. 4, bei der wirklich $N = -1$ werden kann bei geeigneter Wahl von M .

Im folgenden Satze ist $f(t)$ wieder ein Polynom und muß man also wieder durch einen Kreisbogen abschließen:

Satz II. Ist $f(t)$ ein Polynom von der Ordnung k und A eine Konstante für die

$$(16) \quad 1 - Ak > 0,$$

so hat die Kurve

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= At f' - f \\ y &= f' \end{aligned}$$

in bezug auf jeden Punkt $M(x_0, y_0)$ in ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl.

Der Beweis geht genau wie bei Satz I, werden P und Q wie dort erklärt, so gelten wieder (11) und (12) und deshalb

$$(18) \quad x_Q - x_P = -f(t_Q) + f(t_P) + A(t_Q - t_P) y_0 > (A - 1) y_0 (t_Q - t_P).$$

Ist nun $(A - 1) y_0 \geq 0$, so folgt $x_Q > x_P$, also die Behauptung, ist $(A - 1) y_0 < 0$, so führt man wieder die Substitution (13) durch.

Wie oben ist der letzte Schnittpunkt besonders zu betrachten; es können nur Schwierigkeiten entstehen, wenn (14) gilt, also wenn in (15) k ungerade und a_0 negativ ist. Da aber dann

$$x = (Ak - 1) a_0 t^k + \dots,$$

so läuft auch hier die Kurve vom dritten Quadranten aus und ins vierte hinein und es entstehen keine Schwierigkeiten⁸⁾).

Da die Aussage unseres Satzes translationsinvariant ist, so kann man noch etwas allgemeiner behaupten:

Satz IIa. *Unter den Voraussetzungen von Satz II hat die Kurve*

$$(19) \quad \begin{aligned} x &= At f' - f + B \\ y &= f' + C, \end{aligned}$$

wo B und C Konstanten sind, in bezug auf jeden Punkt ihrer Ebene eine nicht-negative Umlaufszahl.

Bei allen Sätzen wurde natürlich vorausgesetzt, daß die Kurve nicht durch den Aufpunkt M hindurchgeht. Liegt aber M auf der Kurve, so bleibt die Behauptung $N_+ - N_- \geq 0$ dem Beweis nach richtig, wenn bei N_- die absteigenden Zweige durch M mitgezählt werden, bei N_+ die aufsteigenden durch M aber nicht. Geometrisch bedeutet das, daß die Umlaufszahl nicht-negativ ist, wenn alle durch M gehenden Zweige links an M vorbeigeführt werden. Da dies der ungünstigste Fall ist, so ist die Umlaufszahl ebenfalls nichtnegativ, wenn die Zweige beliebig vorbeigeführt werden; gibt es welche die rechts vorbeigehen, so ist die Umlaufszahl sogar sicher positiv.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes im regulären Fall.

Wir gehen jetzt daran, den Hauptsatz zu beweisen, und zwar in der am Schluß von § 1 angegebenen Form. Wir führen dazu zunächst die Substitution durch:

$$(20) \quad u = \varrho e^{i\theta}, \quad v = \varrho e^{-i\theta},$$

führen also in der u -Ebene Polarkoordinaten ein. Wir können dann unseren Umlauf beschreiben, indem wir ϱ festhalten und θ um 2π ansteigen lassen.

(9) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(21) \quad w(\varrho, \theta) = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m w_m(\theta); \quad k \geq 3.$$

Offenbar ist

$$(22) \quad \begin{aligned} \varrho_u &= \frac{1}{2} e^{-i\theta}, & \theta_u &= -\frac{i}{2\varrho} e^{-i\theta}, \\ \varrho_v &= \frac{1}{2} e^{i\theta}, & \theta_v &= \frac{i}{2\varrho} e^{i\theta} \end{aligned}$$

⁸⁾ Daß die Nebenbedingung (16) notwendig ist, zeigt das Beispiel $f = -t^3 + t$, $A = 2$. Hier ist $x = t(1 - 5t^2)$, $y = 1 - 3t^2$ und die Kurve sieht aus wie in Fig. 4 und hat in bezug auf den Punkt $(0, \frac{1}{2})$ die Umlaufszahl -1 .

und deshalb

$$(23) \quad w_u = \frac{1}{2\rho} e^{-i\theta} \{\rho w_\rho - i w_\theta\},$$

$$(24) \quad w_{uu} = \frac{1}{4\rho^2} e^{-2i\theta} \{(\rho^2 w_{\rho\rho} - \rho w_\rho - w_{\theta\theta}) + 2i(-\rho w_{\rho\theta} + w_\theta)\}.$$

Also

$$(25) \quad \Delta \arg w_{uu} = -4\pi + \Delta \arg \{(\rho^2 w_{\rho\rho} - \rho w_\rho - w_{\theta\theta}) + 2i(-\rho w_{\rho\theta} + w_\theta)\}.$$

Betrachten wir demnach in der (x, y) -Ebene die Kurve

$$(26) \quad \begin{aligned} x &= -\rho^2 w_{\rho\rho} + \rho w_\rho + w_{\theta\theta}, \\ y &= 2(\rho w_{\rho\theta} - w_\theta) \end{aligned}$$

und ist N_1 die Umlaufszahl dieser Kurve um den Nullpunkt, so wird

$$(27) \quad \Delta \arg w_{uu} = 2\pi(-2 + N_1).$$

Vergleicht man das mit (4), so sieht man, daß

$$(28) \quad N = -2 + N_1.$$

Der Hauptsatz besagt also, daß die Umlaufszahl der Kurve (26) um den Nullpunkt für jeden genügend kleinen Wert von ρ nichtnegativ ausfällt. Daß die Kurve (26) für genügend kleine Werte von ρ nicht durch den Nullpunkt geht, geht daraus hervor, daß nur in einem Nabel x und y gleichzeitig verschwinden können.

Setzt man in (26) die Reihenentwicklung (21) ein und dividiert durch ρ^k , so entsteht die Kurve

$$(29) \quad \begin{aligned} x &= \sum_{m=k}^{\infty} \rho^{m-k} \{w'_m - m(m-2)w_m\}, \\ y &= \sum_{m=k}^{\infty} \rho^{m-k} \{2(m-1)w'_m\}, \end{aligned}$$

die zu (26) ähnlich ist, also ebenfalls die Umlaufszahl N_1 hat. Wir nennen sie die „Kennlinie“ des Nabels. Ihre Gestalt wird für kleine Werte von ρ beliebig gut dargestellt durch

$$(30) \quad \begin{aligned} x &= w'_k - k(k-2)w_k, \\ y &= 2(k-1)w'_k. \end{aligned}$$

Die Kurve (30) nennen wir die Hauptkennlinie des Nabels. Sie ist vor der Kennlinie (29) dadurch ausgezeichnet, daß ihre Gestalt nicht von ρ abhängt.

Offenbar kann man ρ so klein wählen, daß die Kennlinie (29) innerhalb eines Streifens von der vorgegebenen Breite 2ε um die Hauptkennlinie liegt.

Wenn die Hauptkennlinie (30) nicht durch den Nullpunkt geht, so nennen wir unseren Nabel regulär.

In diesem Falle können wir unseren Streifen so schmal wählen, daß er den Nullpunkt nicht enthält. Dann haben offenbar die beiden Kurven (29)

und (30) dieselbe Umlaufszahl. Nun ist aber die Umlaufszahl von (30) wegen Satz I nichtnegativ. Dasselbe gilt also für (29).

Damit ist der Hauptsatz für reguläre Nabelpunkte bewiesen^{8a)}.

Geht die Hauptkennlinie durch den Nullpunkt, so wird die Kennlinie (29) innerhalb des Streifens an den Nullpunkt vorbeiführen. Auch hier aber läßt sich der Schluß durchführen, wenn nur die Kennlinie keine geschlossene Schleife um den Nullpunkt beschreibt. Denn wenn man die Hauptkennlinie an derselben Seite wie die Kennlinie an dem Nullpunkt vorbeiführt, so ist ihre Umlaufszahl nach § 2 nichtnegativ; da die Kennlinie keine Schleifenbildung aufweist, hat sie aber dieselbe Umlaufszahl.

Nun ist eine Schleife sicher nicht vorhanden, wenn an der fraglichen Stelle der Hauptkennlinie x' oder y' von Null verschieden ist. Denn dann gilt dasselbe bei genügend kleinem ϱ für die Kennlinie (29) in der Nähe dieses Punktes, eine der beiden Koordinaten x und y ist monoton und eine Schleife kann nicht vorhanden sein.

Nur wenn x und y auf der Hauptkennlinie (30) eine gemeinsame doppelte Nullstelle haben, ist eine besondere Untersuchung notwendig.

In diesem Falle ist wegen (30) offenbar

$$w'_k - k(k-2)w_k = w''_k - k(k-2)w'_k = w'_k = w''_k = 0,$$

also

$$(31) \quad w_k = w'_k = w''_k = w'''_k = 0.$$

w_k hat also eine mindestens vierfache Nullstelle. Wir sprechen dann von einer wesentlichen Singularität der Kennlinie.

§ 4.

Analytische Vorbereitungen zur Untersuchung der singulären Stellen.

Sei jetzt für $\theta = \theta_0$ eine vierfache Nullstelle von w_k vorhanden. Durch eine Drehung der u -Ebene können wir $\theta_0 = 0$ erreichen. Da die Kennlinie (29) in einer Umgebung dieser Stelle näher untersucht werden muß, ist es zweckmäßig, jetzt w nach Potenzen von ϱ und θ zu entwickeln:

$$(32) \quad w = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m w_m(\theta) = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{m,i} \varrho^m \theta^i.$$

Für x und y aus (29) erhält man daraus entsprechende Entwicklungen. Zur Bestimmung unserer Umlaufszahlen ist es nun offenbar zweckmäßig, die Null-

^{8a)} Bei H. FISCHER, a. a. O. ⁴⁾ ein ähnlicher Beweis, der für eine entsprechende Klasse von Nabelpunkten — also nicht wie behauptet, allgemein — gilt.

stellen von x und y heranzuziehen. Über die Nullstellen einer derartigen Funktion von zwei Veränderlichen aber gibt bekanntlich die Lehre der Puiseux-Entwicklungen Aufschluß.

Stellen wir deshalb zunächst einige der wichtigsten Tatsachen über diese Entwicklungen, soweit sie hier verwendet werden, zusammen⁹⁾. Dabei lassen wir zunächst auch komplexe Entwicklungen zu, obwohl in unserem Falle nur die reellen eine Rolle spielen.

Sei

$$(33) \quad f(\varrho, \theta) = \sum_{i,k}^{\infty} \alpha_{ik} \varrho^i \theta^k$$

eine analytische Funktion der Veränderlichen ϱ und θ , die für $\varrho = \theta = 0$ verschwinden möge. Dann gibt es endlich viele „Nullstellen“

$$(34) \quad \theta = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \varrho^{\mu}$$

von $f(\varrho, \theta)$, die für $\varrho = 0$ in die Nulllösung übergehen. Die μ sind dabei ansteigende positive rationale Zahlen, die sämtlich Vielfache eines Stammbruches $\frac{1}{p}$ sind. Der Einfachheit halber denken wir uns die Substitution

$$(35) \quad \varrho = r^p$$

durchgeführt. Dann werden sämtliche Lösungen (34) Potenzreihen in r .

Um zu untersuchen, welche Lösungen etwa mit einer q -ten Potenz von r anfangen:

$$(36) \quad \theta = \alpha \cdot r^q + \dots,$$

kann man so vorgehen; man setzt in (33) ein

$$(37) \quad \theta = z \cdot r^q$$

und ordnet nach Potenzen von r , also

$$(38) \quad f(\varrho, \theta) = \sum_{v=k}^{\infty} r^v f_v(z) = \sum_{v=k}^{\infty} r^v f_v(\theta \cdot r^{-q}).$$

Die Ordnung des niedrigsten Polynoms $f_K(z)$ gibt dann an, wie viele Nullstellen (36) es gibt und die zugehörigen α lassen sich bestimmen aus der Gleichung

$$(39) \quad f_K(z) = 0.$$

Hat diese Gleichung Wurzeln 0, so bedeutet das, daß die entsprechenden Entwicklungen (36) mit höheren Potenzen von r als r^q anfangen.

⁹⁾ Vgl. etwa A. BRILL, Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen. Braunschweig 1925.

Für unsere Zwecke ist es auch nötig, feststellen zu können, wie viele Nullstellen mit bestimmten Anfangsgliedern:

$$(40) \quad \theta = \sum_{\sigma=q}^{s-1} A_{\sigma} r^{\sigma} + \dots = \varphi(r) + \dots$$

anfangen.

Dazu führt man zuerst die Substitution

$$(41) \quad \begin{aligned} \varrho &= r^p, \\ \theta &= \varphi(r) + t \end{aligned}$$

durch, setzt dann $t = z \cdot r^s$ ein und geht weiter vor wie oben.

Sehen wir deshalb noch nach, wie sich die Substitution (41) auf die Gleichungen (26) auswirkt. Man erhält

$$(42) \quad \begin{aligned} r_{\varrho} &= \frac{1}{p} r^{1-p}, & t_{\varrho} &= -\frac{1}{p} r^{1-p} \varphi', \\ r_{\theta} &= 0, & t_{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

$$(43) \quad \begin{aligned} r_{\varrho\varrho} &= \frac{1-p}{p^2} r^{1-2p}, & t_{\varrho\varrho} &= -\frac{r^{-2p}}{p^2} \{(1-p) r \varphi' + r^2 \varphi''\}, \\ r_{\varrho\theta} &= 0, & t_{\varrho\theta} &= 0, \\ r_{\theta\theta} &= 0, & t_{\theta\theta} &= 0, \end{aligned}$$

und demnach wegen

$$\begin{aligned} w_{\varrho} &= w_r r_{\varrho} + w_t t_{\varrho}, \\ w_{\varrho\varrho} &= w_{rr} r_{\varrho}^2 + r w_{rt} r_{\varrho} t_{\varrho} + w_{tt} t_{\varrho}^2 + w_r r_{\varrho\varrho} + w_t t_{\varrho\varrho} \text{ usw.} \end{aligned}$$

und wenn

$$(44) \quad r \varphi'(r) = \psi(r)$$

gesetzt wird

$$(45) \quad \begin{aligned} \varrho w_{\varrho} &= \frac{1}{p} (r w_r - \psi w_t), \\ w_{\theta} &= w_t, \end{aligned}$$

$$(46) \quad \begin{aligned} \varrho^2 w_{\varrho\varrho} &= \frac{1}{p^2} [r^2 w_{rr} - 2 \psi r w_{rt} + \psi^2 w_{tt} + (1-p) r w_r + (p \psi - r \psi') w_t], \\ \varrho w_{\varrho\theta} &= \frac{1}{p} [r w_{rt} - \psi w_{tt}], \\ w_{\theta\theta} &= w_{tt}. \end{aligned}$$

Also:

$$(47) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{p^2} [-r^2 w_{rr} + 2 r \psi w_{rt} + (p^2 - \psi^2) w_{tt} + (2p - 1) r w_r + \\ &\quad + (r \psi' - 2p \psi) w_t], \\ y &= \frac{2}{p} [r w_{rt} - \psi w_{tt} - p w_t]. \end{aligned}$$

Wenn $\varphi(r) = \psi(r) = 0$ wird, ist insbesondere

$$(48) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{p^2} [-r^2 w_{rr} + (2p-1)rw_r + p^2 w_{tt}], \\ y &= \frac{2}{p} [rw_{rt} - pw_t]. \end{aligned}$$

Schließlich ist für uns noch wichtig, festzustellen, wie die Differentiation nach θ und r auf eine Entwicklung der Form (38) wirkt. Offenbar ist

$$\begin{aligned} \partial_\theta [r^v f_v(\theta r^{-q})] &= r^{v-q} f'_v(\theta r^{-q}), \\ r \partial_r [r^v f_v(\theta r^{-q})] &= v r^v f_v(\theta r^{-q}) - q \theta r^{v-q} f'_v(\theta r^{-q}). \end{aligned}$$

Also

$$(49) \quad \begin{aligned} \partial_\theta [r^v f_v(z)] &= r^{v-q} f'_v(z), \\ r \partial_r [r^v f_v(z)] &= r^v [v f_v(z) - qz f'_v(z)]. \end{aligned}$$

Bei Differentiation nach θ verringert sich also das Gewicht unseres Gliedes um q , bei Anwendung des Operators $r \partial_r$ bleibt es erhalten. Das soll später Verwendung finden.

§ 5.

Singuläre Stellen nullter Stufe.

Denken wir uns, daß die rechten Glieder in (30) für $\theta = \theta_0$ beide eine mindestens doppelte Nullstelle haben. Wir nennen dann θ_0 eine singuläre Stelle nullter Stufe der Kennlinie.

Zur Untersuchung können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\theta_0 = 0$ voraussetzen. Wir denken uns eine Substitution (35) ausgeführt, derart, daß sämtliche Nullstellen der durch (26) definierten Funktionen x und y sowie auch von $w_{\theta\theta}$, für die für $q = 0$ auch $\theta = 0$ wird, durch Potenzreihen in r dargestellt werden, also die Form haben

$$(50) \quad \theta = \sum_{v=q}^{\infty} \alpha_v r^v.$$

r^q möge die niedrigste Potenz von r sein, die in den Entwicklungen für die Nullstellen von x und y vorkommt, M sei so bestimmt, daß für alle Koeffizienten von r^q in diesen Entwicklungen

$$(51) \quad |\alpha_q| < M$$

gilt.

Für genügend kleines r liegen dann alle Schnittpunkte der Kennlinie (29) mit den Achsen innerhalb des Intervalls

$$(52) \quad -Mr^q < \theta < Mr^q.$$

Insbesondere liegen etwa die Punkte A und A_1 von Kennlinie und Hauptkennlinie, die zum Parameterwert $\theta = Mr^q$ gehören, im selben Quadranten und dasselbe gilt für die zum Parameterwert $-Mr^q$ gehörigen Punkte B und B_1 .

Verbinden wir jetzt (Fig. 5) die Punkte B und A durch einen einfachen Zug BCA , der links am Nullpunkt vorbeiläuft und die Kennlinie nicht trifft, und ebenso B_1 und A_1 durch den Zug $B_1C_1A_1$, der die Hauptkennlinie nicht trifft, so ist

$$(53) \quad N_{ADBEA} = N_{ADBCA} + N_{ACBEA},$$

weiter aber

$$(54) \quad N_{ADBCA} = N_{A_1D_1B_1C_1A_1} \geq 0,$$

weil die Kurven $ADBCA$ und $A_1D_1B_1C_1A_1$ sich ineinander deformieren lassen, ohne den Nullpunkt zu durchschreiten und die rechte zur Hauptkennlinie topologisch gleichwertig ist.

Zeigt man also noch, daß

$$(55) \quad N_{ACBEA} \geq 0,$$

so ist die Behauptung bewiesen. Es braucht also nur noch der Verlauf der Kennlinie im Intervall (52), also in der Umgegend jedes singulären Punktes untersucht zu werden. Die Kurve $ACBEA$ nennen wir den zur singulären Stelle gehörigen kritischen Ausschnitt der Kennlinie. Hierbei denken wir uns stets die Abschließung durch den Bogen BCA vorweggenommen¹⁰⁾.

Um nun (55) zu beweisen, verschafft man sich eine bessere Annäherung dieser Kurve als sie die Hauptkennlinie darstellt. Nach der Substitution (35) geht (26) wie wir sahen über in (48), wobei noch $\theta = t$ gesetzt ist. Setzen wir noch

$$(56) \quad t = z \cdot r^q,$$

so haben wir das Intervall

$$(57) \quad -M \leq z \leq M$$

der Kennlinie zu untersuchen.

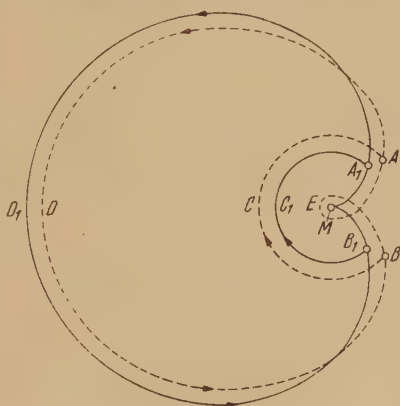


Fig. 5.

¹⁰⁾ In der Fig. 5 ist die Kennlinie (29) punktiert, die Hauptkennlinie (30) ausgezogen gezeichnet. Es ist angenommen, daß nur ein singulärer Punkt vorliegt, sind mehrere vorhanden, so muß man alle in derselben Weise behandeln. Geht die Hauptkennlinie noch an weiteren Stellen durch den Nullpunkt, ohne dort singulär zu werden, so muß man sie dort an derselben Seite wie die Kennlinie an den Nullpunkt vorbeiführen. Wie man sieht, kommt dann alles darauf an, daß für die Umgebung jeder singulären Stelle (55) gezeigt wird.

Wir denken uns nun die Funktion $w(\varrho, \theta)$ nach r und z entwickelt und dabei die von z unabhängigen Glieder vorweggenommen:

$$(58) \quad w = \sum_{v=m}^{n-1} a_v r^v + \sum_{v=n}^{\infty} r^v f_v(z), \quad m \geq 3p.$$

Dies wird nun in (48) eingesetzt, dabei kommt es darauf an, die Glieder niedrigster Ordnung in r aufzufinden. In x kommt nun w_{tt} vor, was auf Glieder vom Gewicht $n - 2q$ führt, in y wird aber nur einmal nach t differenziert, so daß, da r^{n-q} die niedrigste Potenz von r sein wird, deren Koeffizient wirklich von z abhängt. Wir berechnen deshalb $x \pmod{r^{n-2q+1}}$ und $y \pmod{r^{n-q+1}}$. Wir erhalten

$$(59) \quad \begin{aligned} x &\equiv \frac{1}{p^2} m(2p - m) a_m r^m + o(r^m) + r^{n-2q} f_n''(z) \pmod{r^{n-2q+1}}, \\ y &\equiv \frac{1}{p} r^{n-q} \{(n - p - q) f_n'(z) - qz f_n'(z)\} \pmod{r^{n-q+1}}, \end{aligned}$$

wobei das Symbol $o(r^m)$ die übliche Bedeutung hat, also Glieder darstellt, die r in höherer Potenz als der m -ten enthalten.

Nun muß aber x Nullstellen haben, deren Entwicklung mit r^q anfängt, das niedrigste Glied in der Entwicklung darf also nicht von z unabhängig sein. Also ist

$$(60) \quad m \geq n - 2q$$

und es wird

$$o(r^m) \equiv 0 \pmod{r^{n-2q+1}}.$$

(59) nimmt dann die Gestalt an:

$$(61) \quad \begin{aligned} x &\equiv r^{n-2q} \{f_n'' + C\} \pmod{r^{n-2q+1}}, \\ y &\equiv r^{n-q} \{(n - p - q) f_n' - q f_n''\} \pmod{r^{n-q+1}}, \end{aligned}$$

wobei

$$C = \frac{1}{p^2} a_{n-2q} (n - 2q) (2p - n + 2q)$$

gesetzt ist.

Man sieht daraus, daß die Kennlinie in unserem Intervall (57) affin ist zu

$$(62) \quad \begin{aligned} x &= f_n'' + C + o(r), \\ y &= (n - p - q) f_n' - q f_n'' + o(r). \end{aligned}$$

Für genügend kleines r liegt die Kurve (62) in unserem Intervall in einem beliebig schmalen Streifen um die Kurve

$$(63) \quad \begin{aligned} x &= f_n'' + C, \\ y &= (n - p - q) f_n' - q f_n''. \end{aligned}$$

Wir wollen (63) die Kennlinie unserer singulären Stelle nennen. Zu den Parameterwerten $z = \pm M$ mögen auf ihr die Punkte B_2 und A_2 gehören, auf der Kurve (62) seien B und A die entsprechenden Punkte (Fig. 6).

Wir können in die Figur noch das affine Abbild des Bogens BCA eintragen, das wir wieder mit denselben Buchstaben bezeichnen; da dieser Bogen den Nullpunkt linkshalten muß, verbindet er B mit A im negativen Umlaufssinn. Der Bogen ACB läßt sich also in den positiv umlaufenen Kreisbogen $A_2 C_2 B_2$ stetig überführen, mit dem wir die Kennlinie (63) zu einer geschlossenen Kurve abschließen können. Es ist also

$$N_{ACBEA} = N_{A_2 C_2 B_2 E_2 A_2}.$$

Diese letzte Umlaufszahl ist aber nicht negativ, denn auf die Kennlinie (63) läßt sich Satz IIa anwenden; durch die Drehung $y^* = x$, $x^* = -y$ nimmt (63) die Gestalt (19) an. Zu zeigen ist nur, daß die Nebenbedingung (16), die hier lautet

$$(64) \quad n - p - q - (k-1)q > 0,$$

erfüllt ist. Dabei soll k die Ordnung des Polynoms $f_n(z)$ bedeuten.

Sei nun

$$f_n(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_{k-1} z + b_k,$$

dann ist

$$r^n f_n(z) = b_0 r^{n-kq} \theta^k + \dots$$

Da nun in jedem Glied der Entwicklung von w nach ϱ und θ wegen (21) mindestens $\varrho^3 = r^{3p}$ vorkommt, ist

$$n - kq \geq 3p.$$

Daraus folgt sofort (64).

Hiermit ist die Behauptung (55) bewiesen für den Fall, daß die Kennlinie (63) unserer singulären Stelle nicht durch den Nullpunkt geht. Dabei kann wieder nur dann die Kurve (62) neue Schleifen um den Nullpunkt besitzen, wenn für einen bestimmten Wert von z , etwa $z = \alpha$, in (63) nicht nur x und y , sondern auch x' und y' verschwinden. Wir nennen dann

$$(65) \quad \theta = \theta_0 + \alpha r^q$$

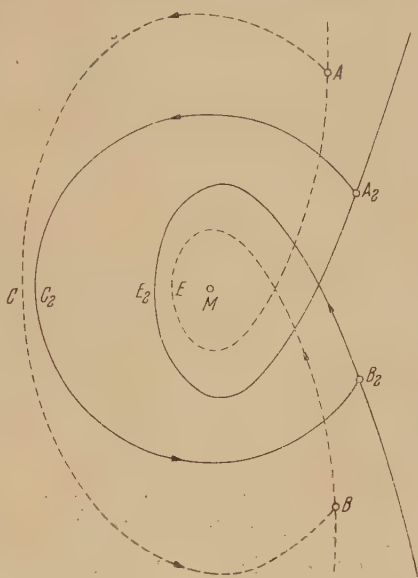


Fig. 6.

eine singuläre Stelle der Stufe eins. An einer solchen Stelle ist offenbar

$$f_n'' + C = f_n''' = (n - p - q) f_n' - q f_n'' = (n - p - q) f_n'' - q f_n''' = 0,$$

also

$$(66) \quad f_n' = f_n'' = f_n''' = 0,$$

während außerdem $C = 0$ sein muß.

Nun folgt aus (58), daß

$$(67) \quad w_\vartheta = \sum_{v=n}^{\infty} r^{v-q} f_v'(z).$$

(66) bedeutet also, daß die Gleichung $w_\vartheta = 0$ mindestens drei Nullstellen hat, deren Entwicklung mit (65) anfängt.

Der Beweis des Hauptsatzes ist jetzt offenbar in dem Falle zu Ende geführt, in dem es zwar singuläre Stellen nullter Stufe, aber keine erster Stufe gibt. Falls solche vorhanden sind, so muß man die Kennlinie (63) ähnlich weiter behandeln wie wir hier mit (30) vorgegangen sind. Ist $\alpha = 0$, so verläuft diese Untersuchung genau wie oben. Ist dagegen $\alpha \neq 0$, so tritt noch eine Komplikation auf; dieser Fall wird im nächsten Paragraphen behandelt.

Ganz allgemein läßt sich das Ergebnis dieses Paragraphen so formulieren: Haben sämtliche zu den singulären Stellen nullter Stufe gehörigen kritischen Ausschnitte der Kennlinie nichtnegative Umlaufszahl, so gilt dasselbe für die Kennlinie (29) des Nabels. Die Bedingung ist sicher erfüllt, wenn es keine singulären Stellen der Stufe eins gibt.

§ 6.

Singuläre Stellen höherer Stufe. Allgemeiner Beweis des Hauptsatzes.

Wenn x und y beide Nullstellen aufweisen, deren Entwicklung etwa mit (40) anfängt, so wird es notwendig, die Kennlinie in einer entsprechenden Umgebung dieser Stelle zu untersuchen. Dazu führen wir zunächst die Transformation (41) durch, wobei (26) die Gestalt (47) annimmt. $\varphi(r)$ wird dabei von Null verschieden, also auch von r wirklich abhängig vorausgesetzt.

Enthält $\varphi(r)$ nur ein Glied, so haben wir eben gesehen, daß auch w_ϑ an der Stelle (40) mindestens eine dreifache Nullstelle hat. Das gilt nicht allgemein; bei den Stellen, die wir zu betrachten haben, wird aber stets w_ϑ eine mindestens doppelte Nullstelle haben. Das besagt offenbar etwas weniger.

Nehmen wir dies also für die zu untersuchende Stelle (40) als richtig an. Dann kann die Entwicklung für w an unserer Stelle (40) nach der Substitution

$$(68) \quad t = z \cdot r^s$$

in der Form angesetzt werden

$$(69) \quad w(\varrho, \theta) = \sum_{v=l}^{m-1} a_v r^v + \sum_{v=n}^{n-1} (b_v z + c_v) r^v + \sum_{v=n}^{\infty} r^v f_v(z),$$

wobei die erste nichtlineare Funktion $f_n(z)$ mindestens von vierter Ordnung ist. Denn es ist

$$(70) \quad w_{\theta\theta} = w_{tt} = \sum_{v=n}^{\infty} r^{v-2s} f_v''(z)$$

und hier ist wegen der Voraussetzung über $w_{\theta\theta}$ das erste Glied mindestens quadratisch in z .

Setzt man nun die Entwicklung (69) in (47) ein, so haben in x sowohl wie in y die von w_{tt} herrührenden Glieder das kleinste Gewicht, und wir erhalten keine vernünftige Kennlinie. Deshalb wenden wir auf (47) zunächst die affine Transformation an:

$$(71) \quad \begin{aligned} x^* &= \psi x + \frac{p^2 - \psi^2}{2p} y, \\ y^* &= \frac{1}{2qA_q} y^{11}. \end{aligned}$$

Die Substitutionsdeterminante

$$(72) \quad \begin{vmatrix} \psi & \frac{p^2 - \psi^2}{2p} \\ 0 & \frac{1}{2qA_q} \end{vmatrix} = \frac{\psi}{2qA_q} = \frac{1}{2} r^q + \dots$$

ist für genügend kleine r positiv, also ist die Umlaufszahl in bezug auf die neuen Achsen dieselbe wie die in bezug auf die alten.

Es wird jetzt

$$(73) \quad \begin{aligned} x^* &= \frac{1}{p^3} [-\psi r^2 w_{rr} + (p^2 + \psi^2) r w_{rt} + (2p - 1) \psi r w_r + \\ &\quad + (r \psi \psi' - p \psi^2 - p^3) w_t], \\ y^* &= \frac{1}{qpA_q} [r w_{rt} - \psi w_{tt} - p w_t]. \end{aligned}$$

Setzt man hier (69) ein, so erhält man in derselben Weise wie in § 5

$$(74) \quad \begin{aligned} x^* &\equiv F(r) + z \cdot o(r^{m+q-1}) + r^{n-s} [(n-p-s) f_n' - s z f_n''] \pmod{r^{n-s+1}}, \\ y^* &\equiv \frac{1}{qpA_q} r^{m-s} (m-s-p) p_m + o(r^{m-s}) - \frac{1}{p} r^{n-2s+q} f_n'' \pmod{r^{n-2s+q+1}}. \end{aligned}$$

Da y eine Nullstelle haben soll, darf das niedrigste Glied nicht konstant sein, also ist

$$m - s \geq n - 2s + q, \quad m \geq n - s + q.$$

Daher ist das zweite Glied in x^* kongruent Null nach dem Modul.

Ist das niedrigste nichtverschwindende Glied in x^* konstant, enthält also $F(r)$ Glieder von kleinerem Gewicht als $n - s$, dann ist für genügend kleines r die Größe x^* im Intervall (57) definit, die Kennlinie kann also in

¹¹⁾ Hier ist $A_q \neq 0$ vorausgesetzt. Ist bei unserer Stelle erst ein höheres Glied etwa das q_1 -te, als erstes von Null verschieden, so muß überall q_1 an die Stelle von q geschrieben werden.

diesem Intervall keine Schleife um den Nullpunkt bilden. Dieser Fall braucht also nicht weiter betrachtet zu werden.

Ist aber $n - s$ das niedrigste Gewicht in x^* , so wird

$$(75) \quad \begin{aligned} x^* &\equiv r^{n-s} [(n-p-s) f_n'' - s z f_n' + a] \pmod{r^{n-s+1}}, \\ y^* &\equiv -\frac{1}{p} r^{n-2s+q} [f_n'' + b] \pmod{r^{n-2s+q+1}} \end{aligned}$$

bei konstanten a und b . Die Kennlinie

$$(76) \quad \begin{aligned} x^* &= (n-p-s) f_n'' - s z f_n' + a \\ y^* &= -(f_n'' + b) \end{aligned}$$

unserer Stelle hat hier wieder bis auf Vorzeichenwechsel von x und y die Gestalt (19). Sie hat also auf Grund von Satz IIa nichtnegative Umlaufszahl.

Wir wenden diese Betrachtungen jetzt an auf „singuläre Stellen k -ter Stufe“, die wir rekursiv folgendermaßen definieren. Die singulären Stellen erster Stufe wurden in § 5 erklärt. Sei nun (40) eine singuläre Stelle k -ter Stufe. Haben dann x und y aus (76) für $z = \alpha$ je eine mindestens doppelte Nullstelle, so nennen wir

$$(77) \quad \theta = \varphi(\bar{r}) + \alpha r^s$$

eine singuläre Stelle der Stufe $k+1$.

Wir zeigen jetzt zunächst, daß die Eigenschaften, die wir bei unserer Untersuchung für die Stelle (40) vorausgesetzt haben, für eine singuläre Stelle beliebiger Stufe erfüllt sind, also daß nicht nur x^* und y^* dort verschwinden, sondern auch x und y und $w_{\theta\theta}$ dort eine mindestens doppelte Nullstelle hat.

Für singuläre Stellen der Stufe 1 sind diese Eigenschaften vorhanden. Nehmen wir also an, sie sind für die singuläre Stelle (40) der Stufe k erfüllt, so müssen wir sie nur für die singuläre Stelle (77) der Stufe $k+1$ beweisen. Nun ist y bis auf einen konstanten Faktor mit y^* identisch, hat also eine Nullstelle. Weiter ist

$$\psi x \equiv \frac{p^2 - \psi^2}{p} y \pmod{r^{n-s}} \equiv -A_\alpha (f_n'' + b) \pmod{r^{n-2s+q+1}},$$

Also hat auch x eine Nullstelle, die mit (77) anfängt, das Polynom $f_n'' + b$ ist ja mit dem niedrigsten Glied in y^* identisch und verschwindet deshalb für $z = \alpha$.

Da schließlich x^* und y^* für $z = \alpha$ je eine doppelte Nullstelle haben sollen, so ist dort

$$\begin{aligned} (n-p-s) f_n'' - s z f_n' + a &= 0, & f_n'' + b &= 0, \\ (n-p-s) f_n'' - s z f_n'' &= 0, & f_n'' &= 0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$(78) \quad f_n'' = f_n''' = 0, \quad b = 0.$$

Daraus folgt aber wegen (70) die Behauptung über $w_{\theta\theta}$.

Die obigen Untersuchungen lassen sich also auf jede singuläre Stelle anwenden.

Definieren wir jetzt wie in § 5 den zur singulären Stelle k -ter Stufe gehörigen kritischen Ausschnitt der Kennlinie des Nabels, der also aus dem Bogen

$$(79) \quad -M \leq z \leq M, \quad \varphi(r) - Mr^2 \leq \theta \leq \varphi(r) + Mr^2$$

dieser Kennlinie durch Verbinden der Endpunkte im positiven Umlaufssinn entsteht, so sieht man genau wie dort ein:

Ein kritischer Ausschnitt k -ter Stufe der Kennlinie des Nabels hat stets dann nichtnegative Umlaufszahl, wenn dasselbe für die in ihm enthaltenen kritischen Ausschnitte der Stufe $k + 1$ gilt, insbesondere also, wenn es auf ihm keine Singularitäten höherer Stufe gibt.

Nun kann es aber keine Singularitäten von beliebig hoher Stufe geben. Denn das würde heißen, daß x und y der Kurve (26) eine gemeinsame Nullstellenentwicklung hätten, dann aber ginge diese Kurve für jede Wahl von r durch den Nullpunkt, was ausgeschlossen worden war.

Die kritischen Ausschnitte höchster Stufe haben nach dem Vorangehenden nichtnegative Umlaufszahl; wenden wir vollständige Induktion nach abnehmender Stufenzahl an, so finden wir, daß jeder Ausschnitt nullter Stufe, und damit nach § 5, daß auch die Kennlinie des Nabels nichtnegative Umlaufszahl hat.

Damit ist der Hauptsatz allgemein bewiesen.

In § 1 wurde vorausgesetzt, daß $w(u, v)$ in einer Umgebung des Nabels eine analytische Funktion von u und v sein sollte. Diese Voraussetzung wurde nirgendwo voll benutzt, vielmehr genügt in jedem Fall das Vorhandensein einer Taylorformel mit genügend vielen Gliedern, wobei das Restglied in der üblichen Weise abgeschätzt werden kann. Für die Anzahl der benötigten Glieder läßt sich allerdings keine obere Schranke angeben.

Weiter sei vermerkt, daß die Reihenentwicklung (9) an keiner Stelle gebraucht wurde, sondern nur die aus ihr hergeleitete Reihe (21). Der Hauptsatz gilt also schon, wenn für w nur eine Entwicklung der Form (21) vorhanden ist. Diese Voraussetzung ist viel schwächer, denn wenn (21) aus (9) hervorgeht, so ist $w_m(0)$ ein trigonometrisches Polynom der Ordnung m .

Noch allgemeiner gilt aber:

Der Hauptsatz ist auch für jeden Nabel richtig, in dessen Umgebung sich w in eine Reihe

$$(80) \quad w = \varrho^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \varrho^{\beta\nu} f_\nu(\theta), \quad \alpha > 2, \beta > 0$$

entwickeln läßt, wobei die $f_\nu(\theta)$ analytische Funktionen der Periode 2π sein sollen. α und β brauchen dabei nicht einmal rational zu sein.

Der vorangehende Beweis läßt sich nämlich auf diesen Fall sofort übertragen.

Wenn (80) gilt, so ist w_{uu} im Nullpunkt nicht mehr erklärt, strebt aber für $u \rightarrow 0$ nach Null. Gilt jedoch eine Entwicklung (80) mit $\alpha < 2$, so hat w_{uu} für $u \rightarrow 0$ im allgemeinen keinen Grenzwert. Der Nullpunkt ist aber auch dann eine singuläre Stelle des Krümmungsliniennetzes und die Fläche hat für $\alpha > 1$ dort sogar eine stetige Tangentenebene.

Für solche „Nabel“ gilt der Hauptsatz nicht mehr, so hat etwa der Nabel

$$w = \varrho^{\frac{3}{2}} (21 \cos 2\theta - 2 \cos 6\theta)$$

die Kennziffer -4 . Hier versagt also der Ansatz, durch Betrachtung der Kennziffer allein kommt man nicht zum Ziel¹²⁾.

§ 7.

Ausblick auf verwandte Fragen.

Es ist naheliegend, Verallgemeinerungen unseres Hauptsatzes zu suchen. Zunächst kann man versuchen, den Satz auf andere Ableitungen als die zweite zu übertragen; wenn die erste Ableitung unserer Funktion $w(u, v)$ im Nullpunkt eine isolierte Nullstelle hat, so wird man vermuten, daß bei einem Umlauf

$$(81) \quad \Delta \arg w_u \geq -2\pi$$

ausfällt; gilt dasselbe für die n -te, ($n \geq 3$), so erwartet man

$$(82) \quad \Delta \arg \frac{\partial^n w}{\partial u^n} \geq -2\pi n.$$

Über die letztere Vermutung ist nichts bekannt, nicht einmal für $n = 3$. Vermutlich würde man hier zum Ziel kommen, wenn man entsprechend Satz I beweisen könnte, daß die Umlaufszahl einer Kurve der Gestalt

$$(83) \quad \begin{aligned} x &= f''' - A f', \\ y &= f'' - B f, \end{aligned}$$

wo f periodisch ist und A und B positive Konstanten sind, nichtnegativ ist. Mit der Methode von § 2 scheint man hier aber nicht durchzukommen.

Dagegen läßt sich (81) ähnlich wie der Hauptsatz beweisen. Der Satz läßt sich aber auch leicht direkt zeigen. Setzt man zunächst

$$(84) \quad \begin{aligned} u &= a + i b, \\ v &= a - i b, \end{aligned}$$

¹²⁾ Das Beispiel ist einem Ansatz von H. FISCHER nachgebildet [a. a. O.⁴⁾, S. 183, die Koeffizienten sind abgeändert worden, weil FISCHERS Beispiel einen Rechenfehler enthält].

so wird w eine reelle analytische Funktion von a und b und man hat:

$$(85) \quad w_u = w_a - i w_b.$$

$\arg w_u$ ist also nichts anderes als der Winkel ψ , den der Gradientvektor (w_a, w_b) mit der a -Achse einschließt, negativ genommen und man muß zeigen, daß

$$(86) \quad \Delta \psi \leq 2\pi$$

gilt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $w(0, 0) = 0$ voraussetzen. Die Niveaulinien der Funktion w sind dann entweder geschlossene Kurven, die den Nullpunkt umkreisen — wenn w im Nullpunkt ein Maximum oder Minimum hat —, oder es gibt endlich viele Kurven, die vom Nullpunkt ausgehen, auf denen w verschwindet.

Diese teilen die Umgebung des Nullpunktes in eine gerade Anzahl $2m$ von Sektoren ein, in denen w abwechselnd positives und negatives Vorzeichen hat.

Da der Gradientvektor einer Funktion stets senkrecht auf den Niveaulinien steht, ist im ersten Fall offenbar $\Delta \psi = 2\pi$. Im zweiten sei in der Fig. 7 einer der Sektoren gezeichnet. Wegen des hyperbelähnlichen Verlaufes der Niveaulinien ist für den Teil des Umlaufes, der im Sektor liegt,

$$\Delta \psi = \alpha - \pi,$$

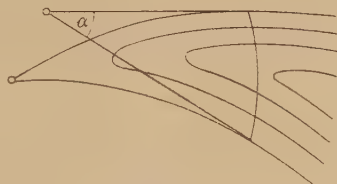


Fig. 7.

wo α den Winkel darstellt, den die Tangenten an die Begrenzungskurven des Sektors im Eintritts- und Austrittspunkt einschließen. Summiert man über alle Sektoren, so ergibt sich

$$\Delta \psi = 2\pi - 2m\pi.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Schließlich sei noch auf einen Satz über Polynome hingewiesen, der — wie W. BLASCHKE bemerkt hat — aus einem Sonderfall des Hauptsatzes leicht hervorgeht.

Sei nämlich $w(u, v)$ homogen von k -ter Ordnung:

$$(87) \quad w(u, v) = w_k(u, v) = \sum_{i=0}^k a_i u^i v^{k-i}, \quad a_i = \bar{a}_{k-i}.$$

Setzen wir $u = vz$, so wird

$$(88) \quad w(u, v) = v^k \sum_{i=0}^k a_i z^i = v^k P_k(z),$$

$$(89) \quad v^k P_k''(z) = w_{zz} = v^2 w_{uu}.$$

Da bei einem Umlauf um den Nullpunkt

$$\Delta \arg v = -2\pi$$

gilt, ist also

$$\Delta \arg w_{uu} = -(k-2)2\pi + \Delta \arg P'_k(z)$$

und da das linke Glied nach dem Hauptsatz $\geq -4\pi$ ist, findet man

$$(90) \quad \Delta \arg P'_k(z) \geq 2\pi(k-4).$$

Durchläuft u einen Kreis vom Radius ϱ , so durchläuft z den Einheitskreis zweimal. Also:

Wenn z den Einheitskreis durchläuft, ist die Zunahme des Argumentes von $P'_k(z)$ mindestens $\left(\frac{k}{2} - 2\right)2\pi$, $P'_k(z)$ hat also im Einheitskreis mindestens $\frac{k}{2} - 2$ Nullstellen.

Bisher wurde stets vorausgesetzt, daß $P'_k(z)$ auf dem Einheitskreis keine Nullstelle hat. Ist eine solche vorhanden, so wird man die Koeffizienten von $P_k(z)$ unter Erhaltung der Bedingung $a_i = \bar{a}_{k-i}$ stetig so abändern, daß keine Nullstellen von P'_k mehr auf dem Einheitskreis liegen. Dann sieht man, daß vor der Abänderung wenigstens $\frac{k}{2} - 2$ im Innern oder auf dem Rande des Einheitskreises gelegen haben müssen.

Bemerken wir schließlich, daß unsere Polynome $P_k(z)$, wie man leicht einsieht, dadurch gekennzeichnet sind, daß mit α stets auch $\frac{1}{\alpha}$ eine Nullstelle ist, so finden wir:

Ist $P_k(z)$ ein Polynom k -ter Ordnung in z , dessen Nullstellenfigur bei Spiegelung am Einheitskreis in sich übergeht, so hat $P'_k(z)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mindestens $\frac{k}{2} - 2$ Nullstellen.

Dieser Satz wurde, wie mir Herr BLASCHKE mitteilt, zuerst von G. BULLIG bewiesen (unveröffentlicht). Vermerkt sei, daß bei dem obigen Beweis der Hauptsatz nur im regulären Fall angewendet wird, man kommt also mit Satz I und § 3 aus.

Aus (81) folgt übrigens in derselben Weise, daß $P'_k(z)$ im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises mindestens $\frac{k}{2} - 1$ Nullstellen hat. In (82) wäre die entsprechende Aussage über die n -te Ableitung von $P(z)$ enthalten. Diese würde für $n = 3$ übrigens auch schon aus der oben formulierten Vermutung über die Kurve (83) hervorgehen.

(Eingegangen am 10. März 1943.)

Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen

$\Phi(X) \Phi(Y) = \Phi(XY)$.

Von

Paul Reisch in München.

§ 1.

Einleitung.

Im Band 48 dieser Zeitschrift, S. 136—172, hat O. PERRON in der Arbeit „Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung“ die Funktionalgleichung

$$(1) \quad \Phi(X) \Phi(Y) = \Phi(XY)$$

behandelt, wo Φ eine ν -reihige, X, Y n -reihige quadratische Matrizen bedeuten. Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit „PERRON“ zitiert; insbesondere verweisen wir auf ihren ersten Abschnitt betreff der auch hier gebrauchten Bezeichnungen.

Die Funktionalgleichung (1) war bereits früher Gegenstand der Untersuchungen von I. SCHUR¹⁾, der für den Fall, daß die Elemente von Φ Polynome in den Elementen x_{pq} von X sind, mit algebraischen Methoden eine Reihe von allgemeinen Sätzen über die Lösungen $\Phi(X)$ bewiesen hat.

Unseren Ausgangspunkt bildet folgender Satz, der die Sätze 7, 8, 9 bei PERRON zusammenfaßt:

Die in der Umgebung von $X = E$ analytischen Lösungen der Gleichung (1) mit $\Phi(E) = E$ sind identisch mit den Lösungen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen

$$(2) \quad |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{sq}} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial |X|}{\partial x_{sp}} \Phi(X) A^{pq} \quad (s, q = 1, \dots, n),$$

die dieselben Bedingungen erfüllen. Hier sind die A^{pq} gewisse konstante Matrizen, nämlich

$$(3) \quad A^{pq} = \left\{ \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{pq}} \right\}_{X=E},$$

¹⁾ I. SCHUR, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Diss. Berlin 1901; Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1927, S. 58—75.

die den Integrabilitätsbedingungen

$$(4) \quad \mathbf{A}^{pq} \mathbf{A}^{rs} - \mathbf{A}^{rs} \mathbf{A}^{pq} = e_{rq} \mathbf{A}^{ps} - e_{ps} \mathbf{A}^{rq} \\ (p, q, r, s = 1, \dots, n)$$

genügen müssen²⁾.

Sind für gegebene Matrizen $\mathbf{A}^{pq}$ die Bedingungen (4) erfüllt, so hat das Differentialgleichungssystem (2) genau eine Lösung der verlangten Art (PERRON, Satz 10).

Die Frage nach der expliziten Angabe von nichttrivialen, irreduziblen³⁾ Lösungen wird von PERRON für die Fälle $n = 1$, wo die Matrix X sich auf ein Element x reduziert, und $\nu = 1, 2, 3$, wo also die Matrix Φ die betreffende Reihenzahl hat, vollständig erledigt.

In der vorliegenden Arbeit werden im § 2 für beliebiges ν in einem speziellen Fall alle Lösungen angegeben, nämlich wenn die nach (3) definierte Matrix $\mathbf{A}^{11} - \lambda \mathbf{E}$ (und damit, wie sich zeigen wird, alle Matrizen $\mathbf{A}^{pp} - \lambda \mathbf{E}$) lauter *lineare, verschiedene Elementarteiler* hat. Im § 3 wird für $\nu = 4$ noch eine Lösung $\Phi(X)$ gebracht, in der nicht alle Elemente Polynome in den x_{pq} sind.

§ 2.

Der Fall linearer, verschiedener Elementarteiler von $\mathbf{A}^{11} - \lambda \mathbf{E}$.

Wir nehmen an, die Matrix $\mathbf{A}^{11} - \lambda \mathbf{E}$ habe lauter verschiedene, lineare Elementarteiler. Durch Übergang zu einer äquivalenten Lösung kann man erreichen, daß

$$(5) \quad \mathbf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_\nu^1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_i^1 \neq \alpha_\kappa^1 \text{ für } i \neq \kappa)$$

ist.

Aus (4) folgt für $q = p > 1$, $r = s = 1$

$$(6) \quad \mathbf{A}^{pp} \mathbf{A}^{11} - \mathbf{A}^{11} \mathbf{A}^{pp} = 0 \quad (p = 2, \dots, n).$$

Sei

$$(7) \quad \mathbf{A}^{pp} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^p & \alpha_{12}^p & \dots & \alpha_{1\nu}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1}^p & \alpha_{\nu 2}^p & \dots & \alpha_{\nu \nu}^p \end{pmatrix};$$

²⁾ Die Differentialgleichungen (2) mit den Integrabilitätsbedingungen (4) kommen schon bei CARTAN vor gelegentlich der Theorie der Darstellung stetiger halbeinfacher Gruppen; vgl. E. CARTAN, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse, 2^e édition, Paris 1933, S. 131–132.

³⁾ Wegen der Begriffe: triviale, reduzible und irreduzible, äquivalente Lösungen, sowie wegen ihrer Eigenschaften vgl. PERRON, § 2 und § 6, S. 154.

dann lautet die Bedingung (6):

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^p \alpha_1^1 & \alpha_{12}^p \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{1r}^p \alpha_r^1 \\ \alpha_{21}^p \alpha_1^1 & \alpha_{22}^p \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{2r}^p \alpha_r^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1}^p \alpha_1^1 & \alpha_{r2}^p \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{rv}^p \alpha_v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^p \alpha_1^1 & \alpha_{12}^p \alpha_1^1 & \dots & \alpha_{1r}^p \alpha_1^1 \\ \alpha_{21}^p \alpha_2^1 & \alpha_{22}^p \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{2r}^p \alpha_2^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1}^p \alpha_r^1 & \alpha_{r2}^p \alpha_r^1 & \dots & \alpha_{rv}^p \alpha_r^1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, daß wegen (5) auch A^{pp} die Gestalt hat

$$(8) \quad A^{pp} = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_v^p \end{pmatrix} \quad (p = 2, \dots, n).$$

Indem wir eventuell wieder zu einer äquivalenten Lösung übergehen, können wir erreichen, daß A^{11} folgende Form annimmt:

$$(9) \quad A^{11} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{B}_k \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathfrak{B}_x = \begin{pmatrix} \beta_1^x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2^x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{v_x}^x \end{pmatrix} \quad (x = 1, \dots, k; v_1 + \dots + v_k = v)$$

und die β_i^x , die in ihrer Gesamtheit mit den α_i^1 übereinstimmen, dabei so angeordnet sein sollen, daß

$$(10) \quad \beta_i^x - \beta_{i+1}^x = 1 \quad (\iota = 1, \dots, v_x - 1),$$

$$(10a) \quad \beta_i^x - \beta_\mu^\lambda \neq \pm 1 \quad (x \neq \lambda; \iota = 1, \dots, v_x; \mu = 1, \dots, v_\lambda).$$

Wegen (5) ist dies möglich. Unter Umständen ist nur eine Serie β_i^1 ($\iota = 1, \dots, v$) vorhanden, oder auch lauter einzelne β_1^x ($x = 1, \dots, v$).

Nach PERRON, Satz 15, S. 156, haben dann die Matrizen A^{p1} , A^{1p} infolge der Bedingungen (4) das Aussehen

$$(11) \quad A^{p1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{B}_k^p \end{pmatrix}, \quad A^{1p} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{C}_k^p \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathfrak{B}_\kappa^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2^{p\kappa} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3^{p\kappa} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{\nu_\kappa}^{p\kappa} & 0 \end{pmatrix}, \quad (p = 2, \dots, n).$$

$$\mathfrak{C}_\kappa^p = \begin{pmatrix} 0 & c_1^{p\kappa} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_2^{p\kappa} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{\nu_\kappa-1}^{p\kappa} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Ist nun $k > 1$ und existieren für ein n Lösungen von (I)

$$\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_k(X),$$

wo Φ_κ eine ν_κ -reihige Matrix bedeutet, für die

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_\kappa(X)}{\partial x_{11}} \right\}_{X=E} = \mathbf{A}_\kappa^{11} = \mathfrak{B}_\kappa,$$

$$\mathbf{A}_\kappa^{p1} = \mathfrak{B}_\kappa^p, \quad \mathbf{A}_\kappa^{1p} = \mathfrak{C}_\kappa^p,$$

so ist

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \Phi_1(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi_2(X) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_k(X) \end{pmatrix}$$

die Lösung des vorliegenden Differentialgleichungssystems mit demselben n . Denn die übrigen $\mathbf{A}^{r q}$ sind durch $\mathbf{A}^{11}$, $\mathbf{A}^{1p}$, $\mathbf{A}^{p1}$ ($p = 2, \dots, n$) vollständig bestimmt, wie aus (4) mit $p = s = 1$ folgt. Für die angegebene Lösung aber stimmen die gemäß (3) gebildeten Matrizen $\mathbf{A}^{11}$, $\mathbf{A}^{1p}$, $\mathbf{A}^{p1}$ mit denen in (9) und (11) überein, und daher ist sie gerade die verlangte. Sie ist also *reduzibel*.

Daß die Φ_κ tatsächlich vorhanden sind, wird sich in der Fortsetzung ergeben.

Um möglicherweise irreduzible Lösungen zu erhalten, können wir daher voraussetzen, daß $\mathbf{A}^{11}$, $\mathbf{A}^{p1}$, $\mathbf{A}^{1p}$ die Gestalt haben:

$$(12) \quad \mathbf{A}^{11} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_\nu \end{pmatrix}, \quad \beta_i - \beta_{i+1} = 1, \quad (i = 1, \dots, \nu - 1),$$

$$(12a) \quad \mathbf{A}^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_\nu^p & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{1p} = \begin{pmatrix} 0 & c_1^p & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{\nu-1}^p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir dürfen weiter annehmen, daß keines der b_i^p verschwindet. Denn andernfalls wird man wieder auf reduzible Lösungen geführt, wie wir jetzt zeigen werden.

Es sei etwa, für ein bestimmtes p , $b_2^p = 0$. Aus den Integrabilitätsbedingungen (4) folgen die Formeln (PERRON, Satz 13, IV; VI, VII mit $q = p$):

$$\begin{aligned} A^{p1} A^{r1} &= A^{r1} A^{p1} & (p, r > 1, p \neq r) \\ (A^{p1} A^{1p} - A^{1p} A^{p1}) A^{r1} - A^{r1} (A^{p1} A^{1p} - A^{1p} A^{p1}) &= e_{rp} A^{p1} + A^{r1}, \\ A^{1r} (A^{p1} A^{1p} - A^{1p} A^{p1}) - (A^{p1} A^{1p} - A^{1p} A^{p1}) A^{1r} &= e_{pr} A^{1p} + A^{1r}, \\ & (p, r > 1). \end{aligned}$$

Setzen wir $T = A^{p1} A^{1p} - A^{1p} A^{p1}$, so haben wegen $b_2^p = 0$ die nachfolgenden Matrizen die angegebene Gestalt, wobei nur die Elemente, auf die es ankommt, hingeschrieben sind:

$$\begin{aligned} A^{p1} A^{r1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ b_3^p b_2^r & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, & A^{r1} A^{p1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \\ T A^{r1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ -b_2^r b_3^p c_2^p & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, & A^{r1} T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \\ A^{1r} T &= \begin{pmatrix} 0 & -c_1^r b_3^p c_2^p & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, & T A^{1r} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus den obigen Formeln folgt demnach

$$\begin{aligned} b_3^p b_2^r &= 0 & (p \neq r), \\ -b_2^r b_3^p c_2^p &= b_2^r, & -c_1^r b_3^p c_2^p = e_{pr} c_1^p + c_1^r. \end{aligned}$$

Nun ist *entweder*

$$b_3^p = 0;$$

dann ergibt sich sogleich, daß

$$b_2^r = c_1^r = 0 \quad \text{für alle } r > 1;$$

oder es ist $b_3^p \neq 0$; dann kommt aus der ersten Gleichung

$$(13) \quad b_2^r = 0 \quad (\text{schließlich für alle } r > 1)$$

und die letzte wird für $p = r$, bzw. für $p \neq r$

$$-c_1^p b_3^p c_2^p = 2 c_1^p, \quad -c_1^r b_3^p c_2^p = c_1^r.$$

Danach muß mindestens ein $c_1^r (r > 1)$ verschwinden, da sich sonst ein Widerspruch ergeben würde. Aus Symmetriegründen aber ist dann entsprechend (13) auch

$$c_1^r = 0 \quad \text{für alle } r > 1.$$

In jedem Fall ergibt sich, daß in den Matrizen $A^{1r}, A^{r1} (r > 1)$ die erste Zeile und Spalte nur aus Nullen besteht.

Bezeichnen wir mit $\bar{A}^{pq}$ die $(p-1)$ -reihigen Matrizen, die aus A^{pq} durch Weglassen der ersten Zeile und Spalte hervorgehen, und ist $\bar{\Phi}(X)$ eine Lösung von (2), die zu den Matrizen $\bar{A}^{pq}$ gehört, so sind für die Matrix

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} |X|^{\beta_1} & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}(X) \end{pmatrix}$$

die Matrizen A^{11}, A^{1r}, A^{r1} gerade die vorliegenden. Wie oben schließen wir, daß $\Phi(X)$ die Lösung des betrachteten Differentialgleichungssystems darstellt. Sie ist, wie behauptet, reduzibel.

Analog läßt sich zeigen: Wenn ein gewisses b_i^p (oder ein c_{i-1}^p) gleich Null ist, so bestehen in allen Matrizen A^{1r}, A^{r1} die $(i-1)$ -te Zeile und Spalte aus lauter Nullen, was auf eine reduzible Lösung führt.

Wir setzen also voraus, daß kein b_i^p Null ist. Nun folgt aus (4) für $p = q = r \neq 1, s = 1$

$$(14) \quad A^{pp} A^{p1} - A^{p1} A^{pp} = A^{p1}.$$

Man hat nach (8) und (12 a)

$$A^{pp} A^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2^p b_2^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3^p b_3^p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_v^p b_v^p & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{p1} A^{pp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1^p b_2^p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^p b_3^p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{v-1}^p b_v^p & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf Grund dieser Darstellungen und von (12 a) folgt aus (14), daß A^{pp} ebenfalls dargestellt ist in der Gestalt

$$(15) \quad A^{pp} = \begin{pmatrix} \gamma_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_v^p \end{pmatrix} \quad (p = 2, \dots, n),$$

wo aber jetzt

$$(16) \quad \gamma_{i+1}^p - \gamma_i^p = 1 \quad (i = 1, \dots, v-1)$$

ist. Danach kann z. B. A^{22} vollständig die Rolle übernehmen, die A^{11} von Anfang an gespielt hat, und hieraus erkennen wir, daß n nicht größer als 2 sein kann. Denn für jedes $p > 2$ müßte (16) gleichzeitig mit

$$\gamma_i^p - \gamma_{i+1}^p = 1 \quad (i = 1, \dots, v-1)$$

bestehen, was unmöglich ist.

Nach den bisherigen Überlegungen können wir uns bei der Suche nach nichttrivialen, irreduziblen Lösungen auf folgenden Fall beschränken: Es ist $n = 2$ und die Matrizen A^{11} , A^{21} , A^{12} sind gegeben durch (12) und

$$(17) \quad A^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_v & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{v-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$(b_{i+1} \neq 0, c_i \neq 0).$$

Betrachtet man die Lösung $|X|^{-\beta_v} \Phi(X)$ an Stelle von $\Phi(X)$, so erkennt man, daß A^{11} auch in der Form angenommen werden darf

$$(18) \quad A^{11} = \begin{pmatrix} v-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & v-2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus (4) für $p = s = 2$, $q = r = 1$ ergibt sich nun

$$A^{22} = A^{21} A^{12} - A^{12} A^{21} + A^{11}.$$

Nach (17) und (18) wird die rechte Seite

$$(19) \quad \begin{pmatrix} -b_2 c_1 + v-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 c_1 - b_3 c_2 + v-2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{v-1} c_{v-2} - b_v c_{v-1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_v c_{v-1} \end{pmatrix};$$

daher kommt nach Vergleich mit (15)

$$\sum_{\kappa=1}^v \gamma_{\kappa}^2 = \sum_{\kappa=1}^{v-1} \kappa.$$

Somit zeigt sich wegen (16), daß

$$(20) \quad A^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nu - 1 \end{pmatrix}$$

ist. Weiter ergeben sich aus (19) und (20) die Gleichungen

$$(21) \quad b_{\kappa+1} c_{\kappa} = \kappa (\nu - \kappa) \quad (\kappa = 1, \dots, \nu - 1).$$

Wir definieren jetzt zwei Matrizen Γ, Δ folgendermaßen:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{\nu-1} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_k = \frac{(\nu - k - 1)!}{(\nu - 1)!} \prod_{\kappa=1}^k c_{\kappa}, \quad (k = 1, \dots, \nu - 1).$$

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_k = \frac{1}{k!} \prod_{\kappa=1}^k b_{\kappa+1},$$

Wegen (21) ist dann

$$\gamma_k \delta_k = 1 \quad (k = 0, 1, \dots, \nu - 1),$$

d. h. $\Delta = \Gamma^{-1}$. Gehen wir zu der äquivalenten Lösung

$$\Gamma \Phi(X) \Gamma^{-1}$$

über, so ergibt die Ausrechnung mit Hilfe von (21), daß

$$A^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \nu - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \nu - 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

wird, wogegen A^{11}, A^{22} unverändert bleiben.

Das Differentialgleichungssystem (2) hat nun die Form

$$(22) \quad \begin{aligned} |X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \begin{pmatrix} \nu - 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \nu - 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ |X| \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s2}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi \begin{pmatrix} 0 & \nu - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

($s = 1, 2$).

Für dieses System sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, was in der Herleitung eigentlich schon enthalten ist; wir werden dies aber auch direkt dadurch bestätigen, daß wir die Lösung des Systems mit $\Phi(E) = E$ angeben.

Durch Multiplikation des ersten Paares der Gleichungen (22) mit x_{s1} ($s = 1, 2$), des anderen mit x_{s2} und Addition kommt

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 x_{st} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{st}} = \Phi \cdot (\nu - 1) E = (\nu - 1) \Phi,$$

d. h. die Elemente $\varphi_{\rho\sigma}$ von Φ sind homogene Funktionen der x_{st} vom Grad $(\nu - 1)$.

Geht man zu den $\varphi_{\rho\sigma}$ über, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\rho\nu}}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial \varphi_{\rho 1}}{\partial x_{s2}} = 0, \\ (23) \quad |X| \frac{\partial \varphi_{\rho\sigma}}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} (\nu - \sigma) \varphi_{\rho\sigma} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \sigma \varphi_{\rho, \sigma+1} = |X| \frac{\partial \varphi_{\rho, \sigma+1}}{\partial x_{s2}}, \\ &(\rho = 1, \dots, \nu; \sigma = 1, \dots, \nu - 1). \end{aligned}$$

Da die $\varphi_{\rho\sigma}$ homogen vom Grad $(\nu - 1)$ sein sollen, legt die Betrachtung von Spezialfällen nahe, den Ansatz zu versuchen:

$$(24) \quad \varphi_{\rho 1} = x_{11}^{\nu-\rho} x_{21}^{\rho-1}.$$

Die rekursive Behandlung der Gleichungen (23) führt dann zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned} (25) \quad \varphi_{\rho\sigma} &= \sum_{\mu_1 \leq i \leq \mu_2}^i \binom{\rho-1}{i-1} \binom{\nu-\rho}{\sigma-i} x_{11}^{\nu-\rho-\sigma+i} x_{21}^{\rho-i} x_{12}^{\sigma-i} x_{22}^{i-1} \\ &(\rho, \sigma = 1, \dots, \nu). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir

$$\mu_1 = \text{Max}(1, \rho + \sigma - \nu), \quad \mu_2 = \text{Min}(\rho, \sigma)$$

gesetzt.

Daß diese Gleichungen in der Tat die gewünschte Lösung von (23) darstellen, läßt sich folgendermaßen bestätigen. Zunächst erkennt man unmittelbar, daß

$$\varphi_{\rho\sigma}(E) = \varepsilon_{\rho\sigma}.$$

Für $\sigma = 1$ bzw. ν reduzieren sich die Lösungen auf (24), bzw.

$$\varphi_{\rho\nu} = x_{12}^{\nu-\rho} x_{22}^{\rho-1},$$

also sind die ersten Gleichungen (23) erfüllt. Daß dies auch für die übrigen zutrifft, läßt sich etwa auf folgende Weise sehen. Wir betrachten das Polynom von z

$$\begin{aligned}\psi_\sigma(X; z) &= \binom{\nu-1}{\sigma-1} (x_{11} + x_{21}z)^{\nu-\sigma} (x_{12} + x_{22}z)^{\sigma-1} \\ &= \binom{\nu-1}{\sigma-1} \sum_{\varrho=1}^{\nu} z^{\varrho-1} \sum_{\mu_1 \leq i \leq \mu_2} \binom{\nu-\sigma}{\varrho-i} \binom{\sigma-1}{i-1} x_{11}^{\nu-\varrho-\sigma+i} x_{21}^{\varrho-i} x_{12}^{\sigma-i} x_{22}^{i-1} \\ &= \sum_{\varrho=1}^{\nu} \binom{\nu-1}{\varrho-1} \varphi_{\varrho\sigma} z^{\varrho-1}.\end{aligned}$$

Danach haben wir, wenn wir z. B. die partielle Ableitung nach x_{11} bilden:

$$\begin{aligned}|X| \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_{11}} &= |X| \sum_{\varrho=1}^{\nu} \binom{\nu-1}{\varrho-1} \frac{\partial \varphi_{\varrho\sigma}}{\partial x_{11}} z^{\varrho-1} \\ &= |X| \cdot \binom{\nu-1}{\sigma-1} (\nu-\sigma) (x_{11} + x_{21}z)^{\nu-\sigma-1} (x_{12} + x_{22}z)^{\sigma-1} \\ &= \binom{\nu-1}{\sigma-1} (\nu-\sigma) (x_{11} + x_{21}z)^{\nu-\sigma-1} (x_{12} + x_{22}z)^{\sigma-1} [x_{22}(x_{11} + x_{21}z) - \\ &\quad - x_{21}(x_{12} + x_{22}z)] \\ &= x_{22}(\nu-\sigma) \psi_\sigma - x_{21}\sigma \psi_{\sigma+1},\end{aligned}$$

und damit ist ein Teil der zweiten Zeile von (23) bestätigt. Entsprechend verifiziert man den Rest von (23).

Die Polynome (25) haben ersichtlich die Eigenschaften

$$\begin{aligned}\varphi_{\varrho, \nu-\sigma+1}(x_{12}, x_{22}, x_{11}, x_{21}) &= \varphi_{\varrho\sigma}(x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}), \\ \varphi_{\nu-\varrho+1, \sigma}(x_{21}, x_{22}, x_{11}, x_{12}) &= \varphi_{\varrho\sigma}(x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}),\end{aligned}$$

die man auch aus den Gleichungen (23) direkt hätte herleiten können.

Die Determinante der so gefundenen Lösung von (1) und (2), die wir mit $\Phi_\nu(X)$ bezeichnen wollen, ist ⁴⁾

$$|\Phi_\nu(X)| = |X|^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

Diese Lösung ist irreduzibel. Denn angenommen, $\Phi_\nu(X)$ wäre einer Matrix der Form

$$\overline{\Phi}(X) = \begin{pmatrix} \Phi'(X) & 0 \\ 0 & \Phi''(X) \end{pmatrix}$$

äquivalent, wo die Summe der Reihenzahlen ν' und ν'' von Φ' und Φ'' gleich ν wäre. Dann könnte $\overline{\Phi}(X)$, eventuell durch Transformation mit einer Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma' & 0 \\ 0 & \Gamma'' \end{pmatrix},$$

⁴⁾ SCHUR, Diss. S. 8; vgl. Fußnote 1.

wo $|I| \neq 0$ und I', I'' wieder die Reihenzahlen ν', ν'' haben, so gewählt werden, daß die Matrix $\bar{A}^{11}$ die Gestalt hätte

$$\bar{A}^{11} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{\nu'} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mu_{\nu''} \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i, μ_k in ihrer Gesamtheit mit den Zahlen $0, 1, \dots, \nu - 1$ [vgl. (18)] übereinstimmen und überdies nach abnehmenden λ_i, μ_k geordnet wären. Dann hätte $\bar{A}^{21}$ die Form (17), wobei aber wegen der Reduzibilität von $\bar{\Phi}$ mindestens das Element $b_{\nu'+1}$ gleich 0 wäre. Die Matrizen $\bar{A}^{21}$ und A^{21} hätten also verschiedenen Rang und könnten daher nicht äquivalent sein, womit die Irreduzibilität von $\Phi_\nu(X)$ bewiesen ist.

Fassen wir alle Resultate dieses Paragraphen zusammen, so ergibt sich der

Satz. *Hat die Matrix $A - \lambda E$ im System (2) lauter verschiedene, lineare Elementarteiler, so ergeben sich in der Umgebung von $X = E$ analytische, nichttriviale, irreduzible Lösungen nur für $n = 2$, und zwar sind es die Lösungen*

$$|X|^\sigma \Phi_\nu(X)$$

und die damit äquivalenten. Die Elemente von $\Phi_\nu(X)$ sind homogene Polynome vom Grad $(\nu - 1)$ in $x_{11}, \dots, x_{22}$, die gegeben sind durch die Formeln

$$\varphi_{\varrho\sigma}(X) = \sum_{\mu_1 \leq i \leq \mu_2}^i \binom{\varrho-1}{i-1} \binom{\nu-\varrho}{\sigma-i} x_{11}^{\varrho-\sigma+i} x_{21}^{\varrho-i} x_{12}^{\sigma-i} x_{22}^{i-1}$$

$$(\mu_1 = \text{Max}(1, \varrho + \sigma - \nu), \mu_2 = \text{Min}(\varrho, \sigma); \varrho, \sigma = 1, \dots, \nu).$$

Es ist

$$|\Phi_\nu(X)| = |X|^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}.$$

Beispielsweise ist für $\nu = 4$:

$$\Phi_4(X) = \begin{pmatrix} x_{11}^3 & 3x_{11}^2 x_{12} & 3x_{11} x_{12}^2 & x_{12}^3 \\ x_{11}^2 x_{21} & 2x_{11} x_{21} x_{12} + x_{11}^2 x_{22} & 2x_{11} x_{12} x_{22} + x_{21} x_{12}^2 & x_{12}^2 x_{22} \\ x_{11} x_{21}^2 & 2x_{11} x_{21} x_{22} + x_{21}^2 x_{12} & 2x_{12} x_{21} x_{22} + x_{11} x_{22}^2 & x_{12} x_{22}^2 \\ x_{21}^3 & 3x_{21}^2 x_{22} & 3x_{21} x_{22}^2 & x_{22}^3 \end{pmatrix}.$$

§ 3.

Spezielle Lösungen für $\nu = 4$.

Wir setzen voraus, es sei $\nu = 4$ und die Matrix $A^{11} - \lambda E$ besitze zwei quadratische Elementarteiler $(\lambda - \alpha_1)^2$, $(\lambda - \alpha_2)^2$. Nach PERRON, Satz 16, S. 157, muß, wenn nichttriviale Lösungen vorhanden sein sollen, etwa

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 1$$

sein, und auch dann kann n nur die Werte 3 oder 2 haben. Wiederum läßt sich durch Übergang zu der Lösung $[X]^{-\alpha_1} \Phi(X)$ erreichen, daß die eine Wurzel Null wird. Nehmen wir noch A^{11} in Kästchenform an, so können wir setzen

$$(26) \quad A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus PERRON, Satz 15, ergibt sich jetzt, daß die Matrizen A^{p1} , A^{1p} die Gestalt haben müssen

$$(27) \quad A^{p1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^p & 0 & 0 & 0 \\ b_1^p & b_0^p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{1p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_0^p & 0 \\ 0 & 0 & c_1^p & c_0^p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (p > 1)$$

Aus den Bedingungen (4) kann die nachstehende abgeleitet werden (PERRON, Satz 13, VI für $r = p$):

$$(A^{p1} A^{1q} - A^{1q} A^{p1}) A^{p1} - A^{p1} (A^{p1} A^{1q} - A^{1q} A^{p1}) = 2 e_{pq} A^{p1} \\ (p, q > 1).$$

Die Ausrechnung gemäß (27) führt auf die Gleichungen

$$(28) \quad (b_0^p)^2 c_0^q = e_{pq} b_0^p, \\ b_0^p (b_0^p c_1^q + b_1^p c_0^q) + b_0^p b_1^p c_0^q = e_{pq} b_1^p.$$

Nun kann b_0^p nicht gleich Null sein; denn dann würde aus der zweiten Gleichung für $q = p$ folgen $b_1^p = 0$, also $A^{p1} = 0$, was bei einer nichttrivialen Lösung nicht eintreten kann⁵⁾. Daher kommt

$$b_0^p c_0^q = e_{pq}.$$

Daraus folgt aber, daß der Fall $n = 3$ unmöglich ist. Denn wäre $n = 3$, so könnte man $p = 2$, $q = 3$ setzen, also

$$b_0^2 c_0^3 = 0.$$

⁵⁾ PERRON, Satz 14.

Ebenso wäre aber

$$b_0^2 c_0^2 = 1, \quad b_0^3 c_0^3 = 1,$$

was auf einen Widerspruch führt. Daher kann n nur gleich 2 sein und die Gleichungen (28) lauten dann, wenn man die überflüssigen oberen Indizes wegläßt, wegen $b_0 \neq 0$:

$$(29) \quad b_0 c_0 = 1, \quad b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0.$$

Wir definieren nun eine Matrix Γ folgendermaßen

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_0 c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Wegen (29) ist $|\Gamma| = c_0^2 \neq 0$ und man hat

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir fortan die äquivalente Lösung $\Gamma\Phi(X)\Gamma^{-1}$, so ergibt sich für diese wegen (26), (27) und (29):

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach (4) haben wir schließlich

$$A^{22} = A^{21}A^{12} - A^{12}A^{21} + A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Differentialgleichungssystem (2) lautet jetzt:

$$(30) \quad \begin{aligned} |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ |X| \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{s2}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \Phi(X) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ (s &= 1, 2). \end{aligned}$$

Für dieses System sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, wie wir wieder direkt durch Angabe der Lösung zeigen werden.

Multipliziert man die Gleichungen (30) mit x_{s1} , bzw. x_{s2} , addiert und summiert über s , so kommt nach Division mit $|X|$:

$$(31) \quad \sum_{s=1}^2 \left(X_{s1} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{s1}} + x_{s2} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_{s2}} \right) = \Phi(X) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus erkennt man, daß die Elemente $\varphi_{\varrho 2}$, $\varphi_{\varrho 4}$ von Φ ($\varrho = 1, \dots, 4$) homogene Funktionen ersten Grades in den x_{pq} sind.

Die Gleichungen (30) ergeben im einzelnen:

$$(32) \quad \frac{\partial \varphi_{\varrho 4}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s2}} = 0,$$

$$|X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 2}}{\partial x_{s1}} = |X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 4}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \varphi_{\varrho 2} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \varphi_{\varrho 4};$$

$$(33) \quad |X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \varphi_{\varrho 4}, \quad |X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \varphi_{\varrho 2},$$

$$|X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} (\varphi_{\varrho 1} + \varphi_{\varrho 2}) + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \varphi_{\varrho 3}, \quad (s = 1, 2),$$

$$|X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} (\varphi_{\varrho 3} + \varphi_{\varrho 4}),$$

Die Gleichungen (32) können für sich allein behandelt werden. Setzt man versuchsweise für $\varphi_{\varrho 2}$, $\varphi_{\varrho 4}$ homogene lineare Polynome, so ergibt sich in der Tat wegen der Anfangsbedingungen

$$\varphi_{\varrho 2}(E) = \varepsilon_{\varrho 2}, \quad \varphi_{\varrho 4}(E) = \varepsilon_{\varrho 4}$$

leicht

$$(34) \quad \begin{aligned} \varphi_{\varrho 2} &= \varepsilon_{\varrho 2} x_{11} + \varepsilon_{\varrho 4} x_{21}, \\ \varphi_{\varrho 4} &= \varepsilon_{\varrho 2} x_{12} + \varepsilon_{\varrho 4} x_{22}, \end{aligned} \quad (\varrho = 1, \dots, 4).$$

Da dies für $\varrho = 1, 3$ Null wird, so ergeben sich aus den Gleichungen (33) die folgenden

$$\frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s1}} = \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s2}} = 0,$$

$$|X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 1}}{\partial x_{s1}} = |X| \frac{\partial \varphi_{\varrho 3}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \varphi_{\varrho 1} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \varphi_{\varrho 3}, \quad (\varrho = 1, 3; s = 1, 2).$$

Da wegen (31) und (34) auch $\varphi_{\varrho 1}$, $\varphi_{\varrho 3}$ ($\varrho = 1, 3$) homogene Funktionen ersten Grades sind, bekommt man hieraus unmittelbar

$$(35) \quad \varphi_{11} = x_{11}, \quad \varphi_{13} = x_{12}, \quad \varphi_{31} = x_{21}, \quad \varphi_{33} = x_{22}.$$

Es bleiben noch die Gleichungen (33) für $\varrho = 2, 4$. Für $\varrho = 2$ etwa bekommen wir mit Rücksicht auf (34):

$$\begin{aligned} |X| \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} (\varphi_{21} + x_{11}) + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \varphi_{23}, \\ |X| \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_{s2}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \varphi_{21} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} (\varphi_{23} + x_{12}), \quad (s = 1, 2). \\ |X| \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} x_{12}, \quad |X| \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x_{s2}} = \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} x_{11}, \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungspaare ergeben

$$(36) \quad \begin{aligned} \varphi_{21} &= x_{11} \log |X| + \bar{\varphi}_{21}(x_{11}, x_{21}), \\ \varphi_{23} &= x_{12} \log |X| + \bar{\varphi}_{23}(x_{12}, x_{22}). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die beiden ersten Gleichungspaare reduzieren sich diese auf

$$\begin{aligned} |X| \frac{\partial \bar{\varphi}_{21}}{\partial x_{s1}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \bar{\varphi}_{21} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \bar{\varphi}_{23}, \\ |X| \frac{\partial \bar{\varphi}_{23}}{\partial x_{s2}} &= \frac{\partial |X|}{\partial x_{s1}} \bar{\varphi}_{21} + \frac{\partial |X|}{\partial x_{s2}} \bar{\varphi}_{23}, \quad (s = 1, 2). \end{aligned}$$

Wegen (36) hat man die Anfangsbedingungen

$$\bar{\varphi}_{21}(E) = \bar{\varphi}_{23}(E) = 0$$

und daraus folgt

$$\bar{\varphi}_{21} = \bar{\varphi}_{23} = 0.$$

Also ist

$$(37) \quad \varphi_{21} = x_{11} \log |X|; \quad \varphi_{23} = x_{12} \log |X|$$

und analog erhält man

$$(38) \quad \varphi_{41} = x_{21} \log |X|, \quad \varphi_{43} = x_{22} \log |X|.$$

Nach (34), (35), (37) und (38) können wir die Lösung der Differentialgleichungen (30) folgendermaßen schreiben:

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} & 0 \\ x_{11} \log |X| & x_{11} & x_{12} \log |X| & x_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 \\ x_{21} \log |X| & x_{21} & x_{22} \log |X| & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Da eine Matrix, deren Elemente alle Polynome sind, nur einer ebensolchen äquivalent sein kann, ist die vorliegende Lösung keiner Polynommatrix äquivalent.

Wir vertauschen noch in $\Phi(X)$ die 2. und 3. Zeile und die 2. und 3. Spalte, gehen also zu einer äquivalenten Lösung über. Dann lassen sich die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassen in dem

Satz: Hat für $\nu = 4$ die Matrix $A^{11} - \lambda E$ zwei quadratische Elementarteiler, so gibt es in der Umgebung von $X = E$ analytische, nichttriviale, irreduzible Lösungen der Funktionalgleichung (1) nur für $n = 2$. Es sind die der folgenden äquivalenten:

$$(39) \quad \Phi(X) = |X|^a \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ x_{11} \log |X| & x_{12} \log |X| & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} \log |X| & x_{22} \log |X| & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Es fehlt noch der Beweis der Irreduzibilität. Wäre aber die Matrix in (39) einer Lösung der Form

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_2(X) \end{pmatrix}$$

äquivalent, so müßte in mindestens einer der Matrizen Φ_1, Φ_2 , die beide Lösungen der Gleichung (1) für $\nu = 2$ darstellten, der $\log |X|$ in rationaler Verbindung mit den x_{pq} vorkommen. Solche Lösungen gibt es aber nicht (PERRON, Satz 18).

Analog zeigt man, daß die Matrix in (39) auch keiner Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ 0 & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{pmatrix}$$

äquivalent sein kann, womit der Beweis der Irreduzibilität beendet ist.

(Eingegangen am 21. März 1943.)

Zur Theorie der Flächenabbildungen.

Von

Frank Löbell in München.

Herrn Prof. Dr. FRIEDRICH PFEIFFER zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

In einer kürzlich an anderer Stelle¹⁾ veröffentlichten Arbeit wurden die allgemeinen Eigenschaften einer reellen regulären Abbildung zweier reeller Flächen aufeinander, soweit sie von deren gegenseitiger Lage unabhängig sind, entwickelt und die für die Untersuchung einer gegebenen Flächenabbildung wichtigsten Formeln aufgestellt. In diesen traten unter der Voraussetzung, daß gleiche Parameterpaare auf beiden Flächen entsprechende Punkte kennzeichnen, im wesentlichen nur die sechs Fundamentalgrößen erster Ordnung der beiden Flächen auf.

Es gibt aber auf diesem Gebiete Fragen, die nur behandelt werden können, wenn außerdem noch die *gemischten Fundamentalgrößen* des Flächenpaares herangezogen werden. In manchen weiteren Fällen ist zwar die Berücksichtigung dieser Funktionen nicht unbedingt nötig, aber zweckmäßig, ja sogar durch die Natur der Fragestellung nahegelegt.

Die folgenden Ausführungen möchten die bisherigen Arbeiten in den angedeuteten Richtungen ergänzen und die theoretische Grundlage für beabsichtigte weitere Untersuchungen geben.

I.

1. *Vorbemerkung.* Wir betrachten im euklidischen Raum die beiden Flächenstücke $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die wir erhalten, wenn wir die stetig differenzierbaren, reellen Vektorfunktionen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ der unabhängigen, reellen Veränderlichen u und v des Bereiches $\mathfrak{B}$ der u - v -Ebene als Ortsvektoren von einem Bezugspunkt O abtragen; die Flächenstücke seien im Definitionsbereich $\mathfrak{B}$ der Funktionen überall regulär, d. h. es sei dort überall $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ und $\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v \neq 0$. Dem Punkte (u, v) der Fläche $\mathfrak{x}$ sei der Punkt (u, v) der Fläche $\mathfrak{y}$ zugeordnet, der *dieselben Koordinaten* u, v hat; dadurch ist, wie als bekannt vorausgesetzt werde²⁾, auf allgemeinste Weise eine umkehrbar eindeutige, überall reguläre *Abbildung* $\mathfrak{x} \xrightarrow{\quad} \mathfrak{y}$ der beiden Flächen aufeinander definiert.

¹⁾ Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Jahrgang 1942, S. 299ff.

²⁾ A. a. O., S. 300.

Die Einheitsvektoren der Normalen der beiden Flächen, die somit als orientiert gedacht werden, seien mit c und c' bezeichnet, so daß

$$c = x_u \times x_v : c x_u x_v \quad \text{und} \quad c' = y_u \times y_v : c' y_u y_v$$

wird. Die Größen

$$c x_u x_v = W, \quad \text{und} \quad c' y_u y_v = W'$$

stehen wegen $(c x_u x_v)^2 = (x_u \times x_v)^2 = x_u^2 x_v^2 - (x_u x_v)^2$ mit den Fundamentalgrößen 1. O. E, F, G und E', F', G' der beiden Flächen in dem Zusammenhang

$$W^2 = EG - F^2, \quad W'^2 = E'G' - F'^2;$$

sie sind bekanntlich Invarianten vom Gewicht 1 gegenüber der Gruppe Γ der gemeinsamen Parametertransformationen der beiden Flächen.

2. *Gegenseitige Lage entsprechender Flächenelemente.* Den Winkel ϑ zweier einander zugeordneter Flächenelemente kann man als *Winkel ihrer Normalenvektoren* berechnen:

$$\cos \vartheta = c c' = \frac{(x_u \times x_v) \cdot (y_u \times y_v)}{c x_u x_v \cdot c' y_u y_v} = \frac{(x_u \times x_v \times y_u) y_v}{c x_u x_v \cdot c' y_u y_v} = \frac{x_u y_u \cdot x_v y_v - x_u y_v \cdot x_v y_u}{c x_u x_v \cdot c' y_u y_v}.$$

Wenn wir die „gemischten Fundamentalgrößen 1. O.“ des Flächenpaares $x(u, v) \gtrless y(u, v)$

$$(1) \quad \bar{E} = x_u y_u, \quad \bar{F}_1 = x_u y_v, \quad \bar{F}_2 = x_v y_u, \quad \bar{G} = x_v y_v$$

einführen, wird

$$(2) \quad \cos \vartheta = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2) : WW'.$$

Unmittelbar aus der Bedeutung der zehn Fundamentalgrößen erkennt man die Richtigkeit folgender Ungleichungen:

$$F^2 < EG, \quad E^2 \leq EE', \quad \bar{F}_1^2 \leq EG', \quad \bar{F}_2^2 \leq GE', \quad \bar{G}^2 \leq GG', \quad F'^2 < E'G';$$

aus (2) fließt die Ungleichung

$$(EG - F^2)(E'G' - F'^2) - (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2)^2 \geq 0,$$

in der die links stehende Funktion ihr Minimum 0 für $\vartheta = 0$ oder 180° , d. h. bei parallelen Flächenelementen, ihr Maximum $W^2 W'^2$ für $\vartheta = \pm 90^\circ$, d. h. bei orthogonalen Flächenelementen annimmt.

Auch die *Schnittgerade der beiden Berührebenen* ε und ε' der Flächen x und y in den entsprechenden Punkten (u, v) kann uns interessieren; wir erhalten als ihre Richtung die des gemeinsamen Lotes der Flächennormalen. Ist s einer der Einheitsvektoren der Schnitttrichtung, so gilt:

$$s \cdot \sin \vartheta = c \times c' = (x_u \times x_v) \times (y_u \times y_v) : c x_u x_v \cdot c' y_u y_v$$

oder

$$(3) \quad s \cdot WW' \sin \vartheta = -x_u \cdot x_v y_u y_v + x_v \cdot x_u y_u y_v = y_u \cdot x_u x_v y_v - y_v \cdot x_u x_v y_u.$$

Da allgemein (wie man bei Benutzung rechtwinkliger Koordinaten für die Vektoren und Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinantentheorie erkennt) für sechs beliebige Vektoren u, v, w, u', v', w' gilt:

$$uvw \cdot u'v'w' = \begin{vmatrix} uu' & uv' & uw' \\ vu' & vv' & vw' \\ wu' & wv' & ww' \end{vmatrix},$$

so stehen die in (3) vorkommenden dreifachen Produkte mit den Fundamentalgrößen in folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} (x_u x_v \eta_u)^2 &= \begin{vmatrix} E & F & \bar{E} \\ F & G & \bar{F}_2 \\ \bar{E} & \bar{F}_2 & E' \end{vmatrix}, & (x_u x_v \eta_v)^2 &= \begin{vmatrix} E & F & \bar{F}_1 \\ F & G & \bar{G} \\ \bar{F}_1 & \bar{G} & G' \end{vmatrix}, \\ (x_u \eta_u \eta_v)^2 &= \begin{vmatrix} E & \bar{E} & \bar{F}_1 \\ \bar{E} & E' & F' \\ \bar{F}_1 & F' & G' \end{vmatrix}, & (x_v \eta_u \eta_v)^2 &= \begin{vmatrix} G & \bar{F}_2 & \bar{G} \\ \bar{F}_2 & E' & F' \\ \bar{G} & F' & G' \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

hierbei ist zu beachten, daß, wenn man aus diesen Determinanten die dreifachen Produkte selbst berechnen wollte, die den vier Quadratwurzeln zu gebenden Vorzeichen durch eines von ihnen schon bestimmt sind, da gilt:

$$(x_u x_v \eta_u) (x_u x_v \eta_v) = \begin{vmatrix} E & F & \bar{F}_1 \\ F & G & \bar{G} \\ \bar{E} & \bar{F}_2 & F' \end{vmatrix} \text{ usw.}$$

3. *Gegenseitige Lage entsprechender Linienelemente.* In $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ und $d\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_u du + \boldsymbol{\eta}_v dv$ haben wir zwei einander zugeordnete *Tangentenvektoren* in den Punkten (u, v) der beiden Flächen. Ihren *Winkel* ζ kann man aus

$$\cos \zeta = \frac{(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) (\boldsymbol{\eta}_u du + \boldsymbol{\eta}_v dv)}{|\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv| |\boldsymbol{\eta}_u du + \boldsymbol{\eta}_v dv|}$$

oder

$$(4) \quad \cos \zeta = \frac{\bar{E} du^2 + (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) du dv + \bar{G} dv^2}{\sqrt{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)(E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2)}}$$

berechnen. Hieraus kann wie aus (2) eine Ungleichung abgeleitet werden, die für alle Werte von du, dv gilt; es sei darauf verzichtet, sie anzuschreiben.

Das Verschwinden der „gemischten Grundform“ des Flächenpaares

$$(5) \quad d\mathbf{x} d\boldsymbol{\eta} = \bar{E} du^2 + (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) du dv + \bar{G} dv^2$$

ist nach (4) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die einander entsprechenden *Flächenrichtungen* $d\mathbf{x}$ und $d\boldsymbol{\eta}$ *orthogonal* sind. Im allgemeinen gibt es also in jedem Paar entsprechender Punkte zwei solche Richtungs-paare, die reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, je nachdem gilt:

$$4 \bar{E} \bar{G} - (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)^2 = 4 (\bar{E} \bar{G} - \bar{F}_1 \bar{F}_2) - (\bar{F}_1 - \bar{F}_2)^2 \leq 0.$$

4. *Die gemeinsamen Lote zusammengehöriger Tangentenpaare.* Den Winkel ζ kann man auch aus

$$e \sin \zeta = \frac{(\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv) \times (\eta_u du + \eta_v dv)}{|\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv| \cdot |\eta_u du + \eta_v dv|}$$

oder

$$(6) \quad e \sin \zeta = \frac{\mathfrak{x}_u \times \eta_u du + (\mathfrak{x}_u \times \eta_v + \mathfrak{x}_v \times \eta_u) du dv + \mathfrak{x}_v \times \eta_v dv^2}{\sqrt{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)(E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2)}}$$

berechnen, wo e einen der Einheitsvektoren des gemeinsamen Lotes der Linienelemente $d\mathfrak{x} \gtrless d\eta$ bedeutet, über deren Lage im Raum man dadurch zugleich etwas erfährt; man sieht nämlich:

Wenn man von dem Ausnahmefall, daß je zwei entsprechende Linienelemente einander parallel sind (vgl. später Nr. 13), absieht, so bilden die durch einen festen Punkt O gelegten *gemeinsamen Lote je zweier entsprechender Berührvektoren* der Flächen $\mathfrak{x}$ und η in den Punkten (u, v) *einen Kegel 2. 0.*

Dieser Kegel kann zerfallen; wann dies geschieht, kann man unter der Voraussetzung, daß c und c' nicht parallel sind ($c \times c' \neq 0$), folgendermaßen entscheiden: Die zum Punkt O parallel verschobenen Linienelemente $d\mathfrak{x}$ und $d\eta$ bilden *projektive Strahlenbüschel*; diese liegen dann und nur dann *perspektiv*, wenn die Schnittrichtung der beiden Berührebenen, die durch den in (3) auf zwei Arten ausgedrückten und (wegen $W \neq 0$, $W' \neq 0$, $\sin \vartheta \neq 0$) nicht verschwindenden Vektor dargestellt wird, sich selbst entspricht, wofür notwendig und hinreichend ist, daß gilt:

$$-\mathfrak{x}_v \eta_u \eta_v : \mathfrak{x}_u \eta_u \eta_v = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \eta_v : -\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \eta_u$$

oder

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \eta_u \cdot \eta_u \eta_v \mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \eta_v \cdot \eta_u \eta_v \mathfrak{x}_u$$

oder

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F}_1 & \bar{F} \\ \bar{F}_2 & \bar{G} & \bar{G} \\ \bar{E}' & \bar{F}' & \bar{F}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{E} & \bar{F}_1 & E \\ \bar{F}_2 & \bar{G} & F \\ \bar{F}' & G' & \bar{F}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingung³⁾ ist, wie man bei genauerem Zusehen erkennt, vollkommen symmetrisch in $\mathfrak{x}$ und η gebaut⁴⁾. Ist aber $c \parallel c'$, so wird (3) der Nullvektor, also verschwinden (wegen $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ und $\eta_u \times \eta_v \neq 0$) alle dreifachen Produkte in (3), und (7) ist mithin erst recht erfüllt. Hiernach ist (7) *das Kriterium für das Zerfallen des oben betrachteten Kegels.*

³⁾ In einer in den Sitz.-ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1943, erscheinenden Arbeit werden die Flächenabbildungen mit Hilfe von Differentialvarianten i_1, i_2, j, j behandelt, die die Bedingung (7) in der Form auszudrücken gestatten: $i_1 i_2 j = 0$.

⁴⁾ Die Richtung der *Perspektivitätsachse* läßt sich mittels der in der vorstehenden Fußnote erwähnten Invarianten durch den Vektor darstellen:

$(i_1 \times i_2 \times i_1) \cdot i (i_2 \times i_1 \times i_2) + (i_2 \times i_1 \times i_2) \cdot i (i_1 \times i_2 \times i_1) + j (i_1 \times i_2)^2 \cdot i_1 \times i_2$,
der im vorliegenden Fall ($i_1 i_2 j = 0$, $i_1 \times i_2 \neq 0$) nicht verschwinden kann.

5. *Geometrische Bedeutung der Fundamentalgrößen.* Ebenso wie durch die Größen $E = \mathbf{x}_u^2$ und $G = \mathbf{x}_v^2$ die Länge jedes der Vektoren $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ und alsdann durch $F = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v$ der Betrag ihres Winkels bestimmt ist, so legen die Fundamentalgrößen E', F', G' Gestalt und Größe des Vektorenpaares η_u, η_v fest. Wie eine geometrische Überlegung zeigt, sind danach allein durch $\bar{E} = \mathbf{x}_u \eta_u$ und $\bar{F}_2 = \mathbf{x}_v \eta_u$ die Winkel von η_u gegen $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ bestimmt, ebenso ist allein durch $\bar{F}_1 = \mathbf{x}_u \eta_v$ und $\bar{G} = \mathbf{x}_v \eta_v$ die Lage von η_v gegen das Zweibein $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ bis auf eine Spiegelung an der Ebene ε festgelegt. Durch F' wird vollends die Entscheidung für den Winkel zwischen η_u und η_v gefällt. Die zehn Fundamentalgrößen 1. 0. des Flächenpaares bilden also ein *vollständiges System von Invarianten des Vektorenquadrupels* $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \eta_u, \eta_v$ gegenüber der Gruppe der kongruenten Raumtransformationen, d. h. der Bewegungen und Umlegungen. Da jedoch der Winkel (η_u, η_v) , wie wir sahen, auch ohne die Kenntnis von F' , wenn auch nicht eindeutig, berechenbar ist, so muß F' von den übrigen Fundamentalgrößen 1. 0. abhängen. [Die auf (2) folgenden Ungleichungen sind hier selbstverständlich als erfüllt vorauszusetzen.]

6. *Zusammenhang zwischen den Fundamentalgrößen.* Die vier Vektoren $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \eta_u, \eta_v$ müssen in der Tat linear abhängig sein:

$$\alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v + \gamma \eta_u + \delta \eta_v = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Multipliziert man diese Beziehung nacheinander mit $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \eta_u, \eta_v$, so erhält man:

$$\alpha E + \beta F + \gamma \bar{E} + \delta \bar{F}_1 = 0,$$

$$\alpha F + \beta G + \gamma \bar{F}_2 + \delta \bar{G} = 0,$$

$$\alpha \bar{E} + \beta \bar{F}_2 + \gamma E' + \delta F' = 0,$$

$$\alpha \bar{F}_1 + \beta \bar{G} + \gamma F' + \delta G' = 0,$$

folglich durch Elimination der Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} E & F & \bar{E} & \bar{F}_1 \\ F & G & \bar{F}_2 & \bar{G} \\ \bar{E} & \bar{F}_2 & E' & F' \\ \bar{F}_1 & \bar{G} & F' & G' \end{vmatrix} = 0.$$

(Setzt man beispielsweise $E = G = E' = G' = 1$, $F = 0,5$, $\bar{E} = \bar{G} = 0$, $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 0,5$, so findet man $12 F'^2 + 4 F' - 5 = 0$, also tatsächlich eine quadratische Bestimmungsgleichung für F' , und es ist $E'G' - F'^2 > 0$.)

7. *Flächenpaare, bei denen je zwei entsprechende Flächennormalen aufeinander senkrecht stehen.* Dafür, daß die Normalen der Flächen $\mathbf{x}$ und η in zugeordneten Punkten *orthogonal* sind, ist nach (2) notwendig und hinreichend, daß gilt:

$$(9) \quad \bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2 = 0.$$

Zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ erhält man eine derart entsprechende Fläche η , wenn man zunächst deren Berührebene durch den Vektor $\mathfrak{v} = -\mathfrak{c}' : p$ darstellt, wo p ihren Abstand von 0, die Stützfunktion des Vektors $\mathfrak{c}'$, bedeutet — es darf also keine der betrachteten Ebenen durch 0 gehen —, worauf sich für η ergibt:

$$(10) \quad \eta \mathfrak{v} + 1 = 0, \quad \eta \mathfrak{v}_u = 0, \quad \eta \mathfrak{v}_v = 0;$$

die erste dieser Gleichungen ist die Inzidenzbedingung für den Punkt η und die Ebene $\mathfrak{v}$. Hiernach muß $\eta = \lambda \mathfrak{v}_u \times \mathfrak{v}_v$ sein mit $\lambda \mathfrak{v}_u \mathfrak{v}_v + 1 = 0$, also

$$(10') \quad \eta = -\mathfrak{v}_u \times \mathfrak{v}_v : \mathfrak{v}_u \mathfrak{v}_v.$$

Nun setzen wir $\mathfrak{v}$ mit Hilfe zweier gegebener, stetig differenzierbarer, skalarer Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\chi(u, v)$ in der Form an:

$$\mathfrak{v} = \varphi \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x}_v;$$

hierbei muß wegen $\mathfrak{v}^2 = (-\mathfrak{c}' : p)^2 = 1 : p^2$ sein:

$$(E \varphi^2 + 2F \varphi \chi + G \chi^2) \cdot p^2 = 1.$$

An $\mathfrak{x}(u, v)$ sind für die Durchführbarkeit dieses Verfahrens, wie zu bemerken war, höhere Differenzierbarkeitsanforderungen zu stellen.

8. *Flächenpaare, bei denen je zwei entsprechende Linienelemente senkrecht sind.* Gemäß (4) ist das identische Verschwinden der gemischten Grundform (5), also das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$(11) \quad \bar{E} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{G} \equiv 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich die Flächen $\mathfrak{x}$ und η in dem Punktpaar (u, v) „durch Orthogonalität der Linienelemente“ entsprechen.

Der Fall, daß dies für alle Punktpaare der beiden Flächen gilt, spielt bekanntlich in der Theorie der infinitesimalen Verbiegungen eine Rolle; es braucht hier nur darauf hingewiesen zu werden, daß man zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ sämtliche ihr auf die genannte Weise zugehörigen Flächen η durch Integration der partiellen Differentialgleichung von WEINGARTEN für eine später von VOLTERRA kinematisch gedeutete skalare Hilfsfunktion finden kann. Es handelt sich hier um einen Spezialfall der Auffindung aller infinitesimalen Deformationen einer gegebenen Fläche aus den gegeben gedachten Hauptverzerrungen⁵⁾.

II.

9. *Flächenpaare, bei denen je zwei entsprechende Flächennormalen parallel sind.* Der Fall, daß sich zwei Flächen „durch parallele Flächenelemente“

⁵⁾ Hierzu vergleiche man eine Arbeit d. V. über Deformationen von Membranen in der Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 7 (1927), S. 464 f. u. 468 f.

entsprechen, erfordert eine etwas ausführlichere Behandlung, einestheils, weil dabei einige allgemein für Flächenabbildungen gültige Tatsachen eine neue Formulierung erfordern, die der hier vorliegenden natürlichen Koppelung der Orientierungen der beiden Flächen Rechnung trägt, andernteils, weil dadurch neue Begriffsbildungen nötig werden und auch neue Bedingungen zu berücksichtigen sind. Besonders muß auch betont werden, daß diese Abbildungsweise der sogenannten relativen Differentialgeometrie⁶⁾ zugrunde liegt, in der allerdings mehr die Eigenschaften, Gebilde und Größen, die gegenüber der Gruppe Π der affinen Raumtransformationen invariant sind, im Vordergrund des Interesses stehen.

10. *Das Kriterium für den Parallelismus der Normalen* in zwei einander entsprechenden Punkten (u, v) der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ($c = \pm c'$) ist entweder nach (3)

$$(12') \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = 0,$$

wobei geometrisch evident ist, daß irgend zwei dieser Gleichungen aus den beiden anderen folgen, oder nach (2)

$$(12) \quad (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2)^2 = (EG - F^2)(E'G' - F'^2).$$

Um zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{x}$ alle ihr durch parallele Normalen entsprechenden Flächen $\mathfrak{y}$ zu finden, pflegt man die Formel (10') zu benutzen, in der nur $\mathfrak{y}$ eine andere Bedeutung hat, nämlich $\mathfrak{y} = -c : p$ mit einer Abstandsfunktion $p(u, v)$, die willkürlich gewählt werden darf, wenn sie nur zweimal stetig differenzierbar ist, während man bei $\mathfrak{x}$ die Existenz sämtlicher Ableitungen 3. O. und ihre Stetigkeit voraussetzen muß, sofern man wünscht, daß $\mathfrak{y}$ stetig differenzierbar sei.

11. *Flächenmaßstab*. Es gibt einen Ausdruck für den Flächenmaßstab M der Abbildung an der Stelle (u, v) , der nur für den Fall paralleler Normalen in den Punkten $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ gilt, dafür aber, im Gegensatz zu der allgemein gültigen Formel, M als rationale Funktion der Fundamentalgrößen 1. O. der Fläche $\mathfrak{x}$ und der gemischten Fundamentalgrößen 1. O. der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gibt: Definiert ist M als der Quotient $c' \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v : c \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v$; daraus folgt, wenn wir jetzt durch die Forderung $c' = c$ gleiche Drehsinne in den beiden Berührebenen einführen:

$$M \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v;$$

hieraus fließt

$$\begin{aligned} M (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2 &= (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) (\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v) = ((\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \times \mathfrak{y}_u) \mathfrak{y}_v \\ &= (\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u) \mathfrak{y}_v, \end{aligned}$$

⁶⁾ Inauguriert von H. MINKOWSKI und EMIL MÜLLER, hauptsächlich weiter bearbeitet von A. DUSCHEK und W. SÜSS; vgl. die Literaturzusammenstellung in BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, S. 64f.

also

$$(13) \quad M = (\overline{E}\overline{G} - \overline{F}_1\overline{F}_2) : (EG - F^2).$$

M ist leicht als der Quotient der Krümmungsmaße der beiden Flächen x und η zu erkennen — vorausgesetzt, daß diese Größen existieren (vgl. später Nr. 19); dies ist im Zusammenhang mit der Deutung der Funktion M als Relativkrümmung von x bezüglich η wohlbekannt.

12. *Fixrichtungen*. Da in dem jetzt betrachteten Falle die Tangenten beider Flächen in entsprechenden Punkten sämtlich einer Ebene parallel sind, so ist das Parallelwerden entsprechender Berührvektoren keine Ausnahme mehr (wie im letzten Abschnitt von Nr. 4); die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das Verschwinden des Ausdruckes (6) oder, da hier keines der Linienelemente $d\eta$ zu c parallel sein kann⁷⁾:

$$(14') \quad c \, dx \, d\eta = c x_u \eta_u \, du^2 + (c x_u \eta_v + c x_v \eta_u) \, du \, dv + c x_v \eta_v \, dv^2 = 0.$$

Ersetzt man c überall durch $x_u \times x_v$, so erhält man hieraus nach dem Muster

$$\begin{aligned} (x_u \times x_v) (x_u \times \eta_u) &= (x_u \times x_v \times x_u) \eta_u = (x_v \cdot x_u^2 - x_u \cdot x_u x_v) \eta_u \\ &= x_u^2 \cdot x_v \eta_u - x_u x_v \cdot x_u \eta_u \end{aligned}$$

$$(14) \quad W \cdot c \, dx \, d\eta = (E\overline{F}_2 - F\overline{E}) \, du^2 + (E\overline{G} - F(\overline{F}_1 - \overline{F}_2) - G\overline{E}) \, du \, dv + (F\overline{G} - G\overline{F}_1) \, dv^2 = 0.$$

Der Vollständigkeit halber mögen auch die Abbildungsmaßstäbe für die Fixrichtungen μ_1 und μ_2 berechnet werden; man erhält sie aus dem Ansatz:

$$\mu (x_u \, du + x_v \, dv) = \eta_u \, du + \eta_v \, dv,$$

oder, nach skalarer Multiplikation mit x_u und mit x_v , aus

$$\begin{aligned} (\mu E - \overline{E}) \, du + (\mu F - \overline{F}_1) \, dv &= 0, \\ (\mu F - \overline{F}_2) \, du + (\mu G - \overline{G}) \, dv &= 0, \end{aligned}$$

also aus der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu E - \overline{E} & \mu F - \overline{F}_1 \\ \mu F - \overline{F}_2 & \mu G - \overline{G} \end{vmatrix} = 0,$$

nach deren Auflösung eine der beiden vorhergehenden Gleichungen den zu jedem Wert von μ gehörenden Wert von $du:dv$ liefert.

Wie man sieht, ist

$$\mu_1 \mu_2 = M.$$

⁷⁾ Imaginär können die beiden im allgemeinen vorhandenen Fixrichtungen nur sein, wenn beide Flächen in den Punkten (u, v) hyperbolische Krümmung besitzen, und sie sind es dann auch nur, wenn die beiden Haupttangentenpaare sich trennen. — Es handelt sich hier, wenn eine der beiden Flächen die „Eichfläche“ ist, um die „Relativkrümmungsrichtungen“.

13. *Flächenpaare, bei denen je zwei einander entsprechende Linienelemente parallel sind.* Ist stets $d\mathfrak{x} \parallel d\mathfrak{y}$, so ist die durch die Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ induzierte Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ eine Ähnlichkeit, und es muß sein: $\mathfrak{y}_u = \lambda \mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{y}_v = \lambda \mathfrak{x}_v$. Soll dies für alle Punkte der beiden Flächen gelten, so muß — falls sämtliche Ableitungen 2. O. von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ existieren und stetig sind, woraus auch die stetige Differenzierbarkeit von λ folgt — sein: $\mathfrak{y}_{uv} = \lambda \mathfrak{x}_{uv} + \lambda_v \mathfrak{x}_u = \mathfrak{y}_{vu} = \lambda \mathfrak{x}_{vu} + \lambda_u \mathfrak{x}_v$, also $\lambda_v \mathfrak{x}_u = \lambda_u \mathfrak{x}_v$, mithin wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$: $\lambda_u = \lambda_v = 0$, somit $\lambda = \text{const.}$ Daher fließt aus $d\mathfrak{y} = \lambda d\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y} = \lambda \mathfrak{x} + \text{const.}$ Die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind also ähnlich und *ähnlich gelegen*. Ein Nachteil dieser Beweisführung ist, daß sie mehr Voraussetzungen bezüglich der Differenzierbarkeit erforderlich macht, als dem Wesen der Fragestellung angemessen ist.

Die Bedingung für die ähnliche Lage von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ist somit nach (14):

$$(14'') \quad E\bar{F}_2 - F\bar{E} = E\bar{G} - F(\bar{F}_1 - \bar{F}_2) - G\bar{E} = F\bar{G} - G\bar{F}_1 \equiv 0.$$

14. *Hauptrichtungen und Hauptmaßstäbe.* Allgemeine Überlegungen sicherten schon früher⁸⁾ die Realität mindestens, im allgemeinen aber auch nur eines Paares orthogonaler Vektoren $a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v$, $c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v$, dem wieder ein Paar orthogonaler Vektoren entspricht; dies sind die sogenannten Hauptrichtungen in den Punkten $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$. a, b, c, d seien so gewählt, daß $a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v$ und $c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v$ Einheitsvektoren sind; dann haben die zugeordneten Vektoren $a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v$ und $c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v$ die Längen m_1 und m_2 der sogenannten Hauptmaßstäbe.

Es sei δ der Winkel, um den m_1 ($a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v$) gedreht werden muß, um mit $a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v$ zusammenzufallen; dann kommt, bei passender Wahl des Vorzeichens von m_2 , $m_2(c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v)$ nach Drehung um δ mit $c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v$ zur Deckung. Von den verschiedenen Beziehungen, die dann gelten, brauchen wir nur einige, zunächst:

$$(a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v) \times (c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v) = c,$$

also

$$(ad - bc) \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = c,$$

folglich nach skalarer Multiplikation mit c :

$$(15a) \quad (ad - bc) \cdot W = 1.$$

Ferner:

$$(a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v)(c\mathfrak{y}_u + d\mathfrak{y}_v) = m_2 \cos(\delta + 90^\circ),$$

$$(c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v)(a\mathfrak{y}_u + b\mathfrak{y}_v) = m_1 \cos(\delta - 90^\circ),$$

folglich durch Subtraktion der oberen von der unteren Gleichung

$$(ad - bc)(\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v) = (m_1 + m_2) \sin \delta$$

⁸⁾ Siehe die in Fußnote 1 zitierte Arbeit, S. 302.

oder

$$(15b) \quad W(m_1 + m_2) \sin \delta = \bar{F}_2 - \bar{F}_1.$$

Schließlich:

$$\begin{aligned} (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \times (c\mathbf{y}_u + d\mathbf{y}_v) &= cm_2 \sin(\delta + 90^\circ), \\ (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \times (a\mathbf{y}_u + b\mathbf{y}_v) &= cm_1 \sin(\delta - 90^\circ), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(ad - bc)(\mathbf{x}_u \times \mathbf{y}_v - \mathbf{x}_v \times \mathbf{y}_u) = c(m_1 + m_2) \cos \delta;$$

hieraus ergibt sich nach skalarer Multiplikation mit $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ und Anwendung der Zerlegungsformel [wie beim Übergang von (14') zu (14)]

$$\begin{aligned} (ad - bc)(\mathbf{x}_u^2 \cdot \mathbf{x}_v \mathbf{y}_v - \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u \mathbf{y}_v - \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \mathbf{y}_u + \mathbf{x}_v^2 \cdot \mathbf{x}_u \mathbf{y}_u) \\ = W(m_1 + m_2) \cos \delta \end{aligned}$$

oder

$$(15c) \quad (EG - F^2)(m_1 + m_2) \cos \delta = E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E}.$$

Aus (15b) und (15c) ist $m_1 + m_2$ bis aufs Vorzeichen berechenbar, nach Wahl dieses Zeichens ist δ eindeutig bestimmt; mit Hilfe von (13) können dann wegen $M = m_1 m_2$ die Hauptmaßstäbe eindeutig berechnet werden.

Der Vergleich mit der in Nr. 12 abgeleiteten Gleichung für μ_1 und μ_2 zeigt, daß gilt:

$$\mu_1 + \mu_2 = (m_1 + m_2) \cos \delta.$$

15. *Die Verdrehung.* Der Winkel δ ist offenbar in dem Falle paralleler Normalen in entsprechenden Punkten eine für die Abbildung ebenso charakteristische Größe wie etwa die Hauptmaßstäbe; wir nennen δ die *Verdrehung der Abbildung* $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ an der Stelle (u, v) und führen noch das „*Verdrehungsmaß*“ ein:

$$(16) \quad \operatorname{tg} \delta = W(\bar{F}_2 - \bar{F}_1) : (E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E}).$$

Es gibt einen einzigen *Ausnahmefall*, in dem der Begriff des Verdrehungswinkels seinen eindeutigen Sinn verliert, den der *indirekten Winkeltreue*: $m_1 = -m_2$; in diesem Fall kann sich, wie eine geometrische Überlegung zeigt, für δ jede Größe ergeben, in Übereinstimmung damit, daß infolge $m_1 + m_2 = 0$ aus (15b) und (15c) folgt, daß sowohl der Zähler als auch der Nenner des Ausdrucks (16) für das Verdrehungsmaß Null wird.

16. *Verzerrungsmaß.* Neben dem schon bei früherer Gelegenheit⁹⁾ für die allgemeine Flächenabbildung eingeführten Maß der Verzerrung

$$V = \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2} \right)^2$$

können wir für die Abbildung mit parallelen Normalen in entsprechenden Punkten ein „*modifiziertes Verzerrungsmaß*“ einführen:

$$V' = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right),$$

⁹⁾ A. a. O., S. 304 u. 306.

eine Funktion, die zwar nicht verschwinden kann, aber, was für eine den Drehsinn umkehrende Abbildung charakteristisch ist, auch negativer Werte fähig ist und durch Annahme eines ihrer Extremwerte 1 bzw. -1 das Vorliegen direkter bzw. indirekter Winkeltreue anzeigt; übrigens gilt $V'^2 = V + 1$. Da — vgl. (15b), (15c) sowie (13) —

$$V'' = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2 m_1 m_2} = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2 m_1 m_2} - 1 = \frac{(\bar{F}_1 - \bar{F}_2)^2}{W^2 2 M} + \frac{(E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E})^2}{(EG - F^2)^2 2 M} - 1$$

ist, so finden wir

$$(17) \quad V' = \frac{(E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E})^2 - (EG - F^2)(2\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1^2 - \bar{F}_2^2)}{2(EG - F^2)(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2)}.$$

17. *Zusammenhang zwischen den Grundformen.* In Teil II traten von Nr. 11 an bis jetzt die Fundamentalgrößen der Fläche η nirgends auf; das steht im Einklang damit, daß sie, wie folgende Überlegung zeigt, durch die übrigen sieben Fundamentalgrößen l. o. bestimmt sind, sobald sich die Flächen x und η mit parallelen Flächenelementen entsprechen: Wenn die vier Vektoren $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{\eta}_u, \mathbf{\eta}_v$ nämlich komplanar sind, so bestimmen $\bar{E} = \mathbf{x}_u \mathbf{\eta}_u$ und $\bar{F}_2 = \mathbf{x}_v \mathbf{\eta}_u$ die Lage des Vektors $\mathbf{\eta}_u$ gegen $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ eindeutig; ebenso $\bar{F}_1 = \mathbf{x}_u \mathbf{\eta}_v$ und $\bar{G} = \mathbf{x}_v \mathbf{\eta}_v$ die von $\mathbf{\eta}_v$ gegen $\mathbf{x}_u$ und $\mathbf{x}_v$ vollständig (vgl. Nr. 5); folglich müssen E', F', G' eindeutig aus $E, F, G, \bar{E}, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{G}$ berechenbar sein, wobei die vier gemischten Fundamentalgrößen im einzelnen Punktepaar (u, v) , abgesehen davon, daß $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2 \neq 0$ sein muß (vgl. Nr. 7), auch dann noch frei gewählt werden können, wenn E, F, G gegeben sind. In der Tat folgt aus

$$W \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{\eta}_u = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \times \mathbf{\eta}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u \mathbf{\eta}_u - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \mathbf{\eta}_u$$

und

$$W \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{\eta}_v = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \times \mathbf{\eta}_v = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u \mathbf{\eta}_v - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \mathbf{\eta}_v$$

oder

$$W \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{\eta}_u = \bar{E} \mathbf{x}_v - \bar{F}_2 \mathbf{x}_u \quad \text{und} \quad W \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{\eta}_v = \bar{F}_1 \mathbf{x}_v - \bar{G} \mathbf{x}_u,$$

da, wenn u irgendeinen Vektor der Berührebene ε bedeutet, $\mathbf{c} \times u$ der aus u durch Drehen um $+90^\circ$ in ε hervorgehende Vektor ist, also $(\mathbf{c} \times u)^2 = u^2$ wird:

$$(18) \quad \begin{aligned} (EG - F^2) \cdot E' &= E \cdot \bar{F}_2^2 - 2F \cdot \bar{E}\bar{F}_2 + G \cdot \bar{E}^2, \\ (EG - F^2) \cdot F' &= E \cdot \bar{F}_2 \bar{G} - F(\bar{E}\bar{G} + \bar{F}_1 \bar{F}_2) + G \cdot \bar{E}\bar{F}_1, \\ (EG - F^2) \cdot G' &= E \cdot \bar{G}^2 - 2F \cdot \bar{F}_1 \bar{G} + G \cdot \bar{F}_1^2. \end{aligned}$$

Diese Beziehungen kann man in einer Gleichung zusammenfassen: Bezeichnen wir nämlich mit t_1, t_2 ein Paar von in Haupttrichtungen fallenden Einheitsvektoren und mit t'_1, t'_2 das aus ihm durch Drehung um δ hervorgehende Paar, so können wir einander zugeordnete Linienelemente $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{\eta}$ folgendermaßen ausdrücken:

$$d\mathbf{x} = \xi t_1 + \eta t_2, \quad d\mathbf{\eta} = m_1 \xi t'_1 + m_2 \eta t'_2,$$

wo ξ und η beliebige Zahlen bedeuten, die nicht beide zugleich Null sind. Daraus ergeben sich folgende Ausdrücke für die vier quadratischen Differentialformen, die sich aus $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{y}$ bilden lassen:

$$d\mathbf{x}^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

$$d\mathbf{y}^2 = m_1^2 \xi^2 + m_2^2 \eta^2,$$

$$d\mathbf{x}d\mathbf{y} = m_1 \cos \delta \cdot \xi^2 + m_2 \cos \delta \cdot \eta^2 + (m_1 - m_2) \sin \delta \cdot \xi \eta,$$

$$c d\mathbf{x}d\mathbf{y} = m_1 \sin \delta \cdot \xi^2 + m_2 \sin \delta \cdot \eta^2 - (m_1 - m_2) \cos \delta \cdot \xi \eta.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $m_1 m_2$, die zweite mit 1, die dritte mit $-(m_1 + m_2) \cos \delta$, die vierte mit $-(m_1 + m_2) \sin \delta$ und addiert sie dann, so ergibt sich:

$$m_1 m_2 d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2 - (m_1 + m_2) (\cos \delta \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y} + \sin \delta \cdot c d\mathbf{x}d\mathbf{y}) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (13), (15b) und (15c):

$$(18') \quad (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2) d\mathbf{x}^2 + (E\bar{G} - F^2) d\mathbf{y}^2 - (E\bar{G} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + G\bar{E}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} + (\bar{F}_1 - \bar{F}_2)(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) d\mathbf{x}d\mathbf{y} = 0.$$

Führt man hierin du und dv ein, so bekommt man wegen der Willkürlichkeit von du und dv drei Gleichungen, die sich als mit (18) gleichbedeutend herausstellen.

Man könnte auch allgemein ansetzen:

$$d\mathbf{y} = c \times d\mathbf{y} \times c + c \cdot c d\mathbf{y}$$

oder

$$W^2 d\mathbf{y} = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \times d\mathbf{y} \times (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) + (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v d\mathbf{y}),$$

woraus nach Multiplikation mit $d\mathbf{y}$ folgt:

$$W^2 d\mathbf{y}^2 = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \times d\mathbf{y})^2 + (\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v d\mathbf{y})^2;$$

dies erweist sich wegen $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \times d\mathbf{y} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u d\mathbf{y} - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v d\mathbf{y}$ in dem Falle $c \parallel c'$ oder $\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v d\mathbf{y} = 0$ als äquivalent mit den Gleichungen (18), im Fall $c \times c' \neq 0$ aber als Identität.

18. *Möglichkeit der Koppelung zweier Flächen durch parallele Normalen.* Können zwei beliebige gegebene Flächen $\mathbf{x}(u, v)$ und $\bar{\mathbf{y}}(\bar{u}, \bar{v})$ so aufeinander abgebildet werden, daß sie in entsprechenden Punkten parallele Berührebenen haben? Bei geeigneter Festsetzung der Flächenorientierungen muß dann gelten:

$$(19) \quad c(u, v) = \bar{c}(\bar{u}, \bar{v}).$$

Diese Vektorgleichung vertritt wegen $c^2 = \bar{c}^2 = 1$ nur zwei skalare Gleichungen; stellen diese Abbildungsformeln dar? Diese Frage können wir nur unter der Annahme der Existenz wenigstens einer Lösung $(u, v; \bar{u}, \bar{v})$ von (19) weiter behandeln, und zwar in der Weise, daß wir untersuchen, ob es Umgebungen von (u, v) auf $\mathbf{x}$ und von $(\bar{u}, \bar{v})$ auf $\bar{\mathbf{y}}$ gibt, in denen die Funktional-

determinante $\bar{u}_u \bar{v}_v - \bar{u}_v \bar{v}_u$ von Null verschieden ist. Wir müssen also die Gleichung (19) differenzieren können, müssen also fordern, daß die Funktionen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\bar{\eta}(\bar{u}, \bar{v})$ sämtliche zweiten Ableitungen besitzen und daß diese stetig sind; unter dieser Voraussetzung gilt:

$$\mathfrak{c}_u = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \bar{u}_u + \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \bar{v}_u, \quad \mathfrak{c}_v = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \bar{u}_v + \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \bar{v}_v,$$

folglich

$$\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v = \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \cdot (\bar{u}_u \bar{v}_v - \bar{u}_v \bar{v}_u).$$

Hieraus erkennen wir: Wenn für die angenommene Lösungsstelle $(u, v; \bar{u}, \bar{v})$ von (19) sowohl $\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v \neq 0$ als auch $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}} \neq 0$ ist, so ist dort sicher auch $\bar{u}_u \bar{v}_v - \bar{u}_v \bar{v}_u \neq 0$; es gibt dann also zufolge der Stetigkeit von $\mathfrak{c}(u, v)$ und $\bar{\mathfrak{c}}(\bar{u}, \bar{v})$ Umgebungen von (u, v) auf $\mathfrak{x}$ und von $(\bar{u}, \bar{v})$ auf $\bar{\eta}$, innerhalb deren (19) eine reguläre Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \bar{\eta}$ definiert. Ist aber an der Stelle einer der Vektoren $\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v$ oder $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}}$ der Nullvektor, so ist entweder $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}$ oder $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ Null; verschwinden beide Vektoren $\mathfrak{c}_u \times \mathfrak{c}_v$, $\bar{\mathfrak{c}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathfrak{c}}_{\bar{v}}$, so ist eine besondere Untersuchung erforderlich.

Natürlich kann auch dann, wenn nicht alle Differentialquotienten 2. O. von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\eta}$ existieren, eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung durch parallele Normalen von $\mathfrak{x}$ auf $\bar{\eta}$ möglich sein; doch ist dafür kein allgemeines Kriterium bekannt.

19. *Abbildung einer Fläche auf eine Kugel.* Immer ist es möglich, eine beliebige Fläche auf die Einheitskugel derart abzubilden, daß die Berührebenen in entsprechenden Punkten gleiche Stellung haben; man braucht zu dem Zweck ja nur dem Punkte $\mathfrak{x}(u, v)$ den Punkt $\mathfrak{c}(u, v)$ zuzuweisen. Diese von GAUSS in die Flächentheorie eingeführte Abbildung „nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen“ spielt bekanntlich eine wichtige Rolle. Da $\eta = \mathfrak{c}$ sich durch die Ableitungen von $\mathfrak{x}$ ausdrückt, so muß jetzt $\mathfrak{x}(u, v)$ stetige zweite Differentialquotienten besitzen, damit die gemischten Fundamentalgrößen existieren; es werden dann

$$(20) \quad \bar{E} = \mathfrak{x}_u \mathfrak{c}_u = -\mathfrak{c} \mathfrak{x}_{uu} = -L, \quad \bar{F}_1 = \mathfrak{x}_u \mathfrak{c}_v = -\mathfrak{c} \mathfrak{x}_{uv} = -M, \\ \bar{F}_2 = -M, \quad \bar{G} = -N$$

im wesentlichen die Fundamentalgrößen 2. O. der Fläche $\mathfrak{x}$. Da hier $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ ist, so gilt wegen (15b) — und zwar auch, wenn $\mathfrak{x}$ eine Minimalfläche ($m_1 + m_2 = 0$) ist, weil dann jeder Wert von δ sinnvoll ist — der Satz:

Die Abbildung einer Fläche auf eine Kugel nach dem Prinzip paralleler Normalen ist verdrehungsfrei.

20. *Einige affininvariante Eigenschaften.* Alle unsere Betrachtungen gehörten der euklidischen Geometrie an. Da aber jede Abbildung einer Fläche auf eine andere, bei der die Berührebenen in entsprechenden Punkten

parallel sind, durch eine affine Transformation des Raumes wieder in eine solche übergeht, so empfinden wir es als geboten, unter den im II. Teil aufgetretenen Begriffen und Eigenschaften diejenigen hervorzuheben, die invariant sind gegenüber der Gruppe Π der affinen Raumtransformationen.

Daß jede Fixrichtung und der für sie geltende Abbildungsmaßstab μ , ferner die ähnliche Lage zweier räumlicher Figuren affinvariant sind, sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Auch daß der Flächenmaßstab $M = m_1 m_2 = \mu_1 \mu_2$ bei einer Abbildung durch parallele Berührebenen eine affine Invariante ist, liegt auf der Hand.

Merkwürdig aber ist, daß die Größe $(m_1 + m_2) \cos \delta$ eine Affinvariante ist. In der Tat: Die Affinität $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ führt $\mathbf{x}_u$ in $\eta_u = A \mathbf{x}_u + B \mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_v$ in $\eta_v = C \mathbf{x}_u + D \mathbf{x}_v$ über. Es ist bekannt, daß die Summe der Hauptdiagonalglieder der Koeffizientenmatrix, ihre Spur $A + D$, eine Invariante gegenüber der Gruppe Π ist; die andere Invariante ist die Determinante der Matrix $AD - BC = M$. Die Koeffizienten A, B, C, D könnte man nun nach den beiden (18) vorausgehenden, vektoriell mit ϵ multiplizierten Formeln durch die Fundamentalgrößen 1. O. ausdrücken; einfacher aber ist es, wenn wir uns in die auf (15c) führende Entwicklung einschalten und ausrechnen:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cos \delta &= (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) (\mathbf{x}_u \times \eta_v - \mathbf{x}_v \times \eta_u) : (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2 \\ &= (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v D - \mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u A) : (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2 \end{aligned}$$

oder

$$(m_1 + m_2) \cos \delta = A + D.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, die übrigens auch unmittelbar aus der am Schluß von Nr. 14 nachgewiesenen Formel folgt.

Ist im besonderen $\delta = \pm 90^\circ$, also $A + D = 0$, so ändert sich dies sonach bei einer Transformation der Gruppe Π nicht¹⁰⁾; es gilt folglich der Satz:

Die Eigenschaft einer Flächenabbildung, unendlich großes Verdrehungsmaß zu besitzen, ist affinvariant; in diesem Zusammenhang muß die indirekte Winkeltreue ($m_1 + m_2 = 0$) unter die Abbildungen mit unendlich starker Verdrehung gerechnet werden.

Wir haben bisher die Flächenabbildungen hauptsächlich nur in den Umgebungen eines einzelnen Paares entsprechender Punkte untersucht. Deshalb bot sich bis jetzt keine Gelegenheit, auf die Integrabilitätsbedingungen einzugehen, denen die Fundamentalgrößen unterliegen; bei weitergehenden Untersuchungen müssen diese jedoch notwendig berücksichtigt werden.

¹⁰⁾ In diesem Fall stehen die Flächen gegenseitig in der Beziehung „relativer Minimalflächen“ zueinander.

Ein Summationsverfahren für die Poincaréschen Reihen von der Dimension — 2 zu den hyperbolischen Fixpunktepaaren.

Von

Hans Petersson in Straßburg.

Herrn C. CARATHÉODORY zum siebzigsten Geburtstag am 13. September 1943.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung schließt sich eng an die zwei letzten von vier Arbeiten an, in denen der Zusammenhang der POINCARÉschen Reihen mit der algebraischen Struktur der automorphen Funktionenscharen aufgedeckt und systematisch erforscht wurde¹⁾. Den Kern dieser Zusammenhänge bilden die zum ersten Male in [J IV] in vollem Umfange hergestellten und einheitlich begründeten wechselseitigen Beziehungen zwischen den Entwicklungen der automorphen Formen einerseits und den POINCARÉschen Reihen andererseits. Es wurde dort gezeigt, wie man durch das Prinzip der *transversalen Summation* aus den Entwicklungen der automorphen Formen den Konstruktionsansatz für die drei Typen der POINCARÉschen Reihen gewinnt, und wie man umgekehrt von diesen Reihen durch das Prinzip der *Metrisierung* zu den Koeffizienten jener Entwicklungen zurückgelangt.

Zur Formulierung der Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung bedienen wir uns einer abkürzenden Terminologie. Eine POINCARÉsche Reihe nennen wir mit Rücksicht auf ihre Entstehung durch transversale Summation nunmehr kurz eine *Quersumme*; wir sprechen von einer Quersumme vom parabolischen Typ oder kurz einer parabolischen Quersumme, wenn es sich

¹⁾ Die linearen Relationen zwischen den ganzen POINCARÉschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe (J I), Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität 12 (1938); Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen (J II), Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 49 (1939); Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der POINCARÉschen Reihen (J III), Math. Annalen 117 (1940); Einheitliche Begründung der Vollständigkeitssätze für die POINCARÉschen Reihen von reeller Dimension bei beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art (J IV), Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität 14 (1941). — Daneben werden in Einzelheiten noch Ergebnisse aus zwei weiteren Arbeiten verwendet: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen I (GI) und V (GV), Math. Annalen 115 (1938); Math. Zeitschr. 44 (1938).

um eine Poincaré-Reihe zu den parabolischen Fixpunkten handelt [(J IV), (5)]. Analog werden die elliptischen und hyperbolischen Quersummen erklärt [(J IV), (8), (11)]. Im übrigen wird an der Terminologie von (J III) und (J IV) wenig geändert; die wichtigsten Bezeichnungen und Grundlagen der Theorie stellen wir im Anschluß an diese Einleitung in einem besonderen Abschnitt zusammen.

Das allgemeine Ziel dieser Arbeit ist, an einigen für die Theorie vordringlichen Beispielen die *Beziehungen* zu diskutieren, welche *zwischen den Quersummen der drei Typen* bestehen. Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art (die wir uns wie bisher als Gruppe von unimodularen reellen Matrizen gegeben denken), $r > 2$, v ein Multiplikatorsystem des Betrages 1 zur Gruppe Γ und zur Dimension $-r$, τ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil. Den Ausgangspunkt für die Herstellung dieser Beziehungen bildet die (spezialisierte) elliptische Quersumme

$$(1) \quad P_{-r}(\tau, z) = \sum_{L \in \Gamma} \frac{1}{v(L) (\gamma\tau + \delta)^r (L\tau - \bar{z})^r} \quad \left(L\tau = L(\tau), L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right),$$

in der z einen Parameter mit positivem Imaginärteil bezeichnet. $P_{-r}(\tau, z)$ gestattet bekanntlich [(J III), (128)], falls $\tau = \infty$ parabolischer Fixpunkt von Γ ist, eine Entwicklung

$$P_{-r}(\tau, z) = C(\Gamma, r, v) \sum_{v+\kappa > 0} (v+\kappa)^{r-1} e^{-2\pi i(v+\kappa)\frac{z}{N}} G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma, v),$$

in der $C(\Gamma, r, v)$ eine Konstante elementaren Charakters, U^N die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\infty$, $v(u^N) = e^{2\pi i\kappa}$, $0 \leq \kappa < 1$ ist, und vermöge deren man die parabolische Quersumme $G_{-r}(\tau, v, I, \Gamma, v)$ mit Hilfe einer Integration nach dz durch $P_{-r}(\tau, z)$ ausdrücken kann.

Ein analoger Zusammenhang besteht nun, wie im folgenden zunächst gezeigt wird, zwischen $P_{-r}(\tau, z)$ und den hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, v)$ [(J IV), (11)] in Gestalt einer Gleichung

$$(2) \quad P_{-r}(\tau, z) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} Q_{r,v}(\tau, H, \Gamma, z) \Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, v)$$

mit Koeffizienten von (verhältnismäßig) elementarer Bauart. Aus dieser Formel gewinnt man eine Darstellung von $\Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, v)$ durch ein Integral nach dz , dessen Integrand, abgesehen von elementaren Faktoren, mit der elliptischen Quersumme $P_{-r}(\tau, z)$ übereinstimmt.

Diese insgesamt vier hier angedeuteten Formeln vermitteln also — nicht auf dem Umwege über die linearen Relationen, die zwischen Quersummen als automorphen Formen bestehen können, sondern *explizit analytisch* —

den Zusammenhang zwischen den Quersummen der drei Typen. Dabei nehmen die elliptischen Quersummen eine zentrale Stellung ein. Man kann demgemäß, wie hier an einem Beispiel aus der Metrisierung gezeigt werden wird, Aufgaben über Quersummen des einen Typus auf solche über Quersummen eines anderen Typus zurückführen. Bei der Beurteilung der hier angedeuteten Zusammenhänge ist aber auf die oben in Paranthese gesetzte Kennzeichnung das Hauptgewicht zu legen. Sie besagt, daß es sich um *analytische Identitäten* handelt, die identisch nicht nur in τ , sondern auch in r, v , und insbesondere in Γ bestehen.

Den Hauptgegenstand der Arbeit bilden nun die Probleme, die durch die Übertragung der bei (2) angedeuteten Beziehungen zwischen elliptischen und hyperbolischen Quersummen auf den Fall der *Differentialklasse* ($r = 2$, $v = 1$) entstehen, in welchem bekanntlich mit absoluter Konvergenz der Quersummen nicht mehr gerechnet werden kann. Hier muß man zur bloßen Definition der Quersummen ein Summationsverfahren heranziehen, das sich bisher bei den parabolischen Quersummen $\{\Gamma, -2, 1\}$, wenn Γ mit der Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ von N -ter Stufe der Modulgruppe zusammenfällt, umfassend bewährt hat [(J III), § 3, 4, 5; (J IV), § 3, 4]. Durch die Zurückführung der elliptischen auf die parabolischen Quersummen gelang es, die entsprechenden Aussagen auch für die elliptischen Quersummen zu erhalten. Insgesamt erwies sich nach erfolgter Anwendung des Summationsverfahrens auf die parabolischen und elliptischen Quersummen mit $\Gamma = \Gamma(N)$, $r = 2$, $v = 1$ diejenige Theorie als gültig, welche aus der allgemeinen Theorie $\{\Gamma, -r, v\}$ ($r > 2$) durch formales Spezialisieren auf $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ entsteht. Über die hyperbolischen Quersummen der Differentialklasse wurden dagegen keine Resultate erzielt.

Die einzige wesentliche Schwierigkeit, Zusammenhänge von der unter (2) angegebenen Art in der Differentialklasse zu realisieren, liegt in dem Erfordernis, nunmehr auch — wenigstens für die speziellen Gruppen $\Gamma = \Gamma(N)$ — eine befriedigende *Definition der hyperbolischen Quersummen* $\{\Gamma, -2, 1\}$ aufzustellen. Der naheliegende Versuch, eine solche Definition auf ein direktes, dem Vorgehen im parabolischen Fall [(J III), § 3] analoges Verfahren zu stützen, führt nicht auf einen erfolgversprechenden Ansatz. Statt dessen erweist es sich in der vorliegenden Arbeit als zweckdienlich und als *verhältnismäßig* einfach, zur Konstruktion der hyperbolischen Quersummen der Differentialklasse die früher entwickelte Theorie der elliptischen und parabolischen Quersummen dieser Klasse heranzuziehen und sie mit Hilfe einer der Gleichung (2) analogen Beziehung zum Tragen zu bringen. Man gelangt zu einer solchen Beziehung durch dieselben Umformungen, die für $r > 2$ die Gleichung (2) zur Folge haben; die Beziehung besteht in einer Identität vom Typus (2) zwischen denjenigen Quersummen, die aus den formalen

Quersummen der Differentialklasse dadurch hervorgehen, daß man im einzelnen Glied, analog zum parabolischen Fall, passend gewählte, von einem komplexen Parameter s abhängige konvergenzerzeugende Faktoren anbringt. Von dieser Beziehung ausgehend können wir in grober Näherung die Methode unserer Untersuchung kurz andeutend wie folgt umschreiben: Es werden die hyperbolischen Quersummen durch eine Integration aus den elliptischen Quersummen extrahiert, und es wird dadurch sowohl die Anwendung des Summationsverfahrens als auch der Beweis der Grundformeln auf die bereits gewonnenen Ergebnisse über elliptische Quersummen zurückgeführt.

Allerdings erfordert die exakte Ausgestaltung dieses Ansatzes einen umfangreichen analytischen Apparat. Dieser dient zunächst der Untersuchung einer Funktion von sechs komplexen Variablen

$$P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{L \in \Gamma} \frac{1}{(\gamma\tau + \delta)^2 |\gamma\tau_0 + \delta|^s (L\tau - \bar{z})^2 |L\tau_0 - \bar{z}_0|^{s'}},$$

die hier an die Stelle der elliptischen Quersummen tritt. Über sie kann nach (J III) und (J IV) als bekannt vorausgesetzt werden, was das wesentliche Ergebnis des dort auf die elliptischen Quersummen der Differentialklasse angewendeten Summationsverfahrens ausmacht. Zusammen mit dem, was in der vorliegenden Abhandlung über die durch jene Gleichung dargestellte Funktion P bewiesen wird, ergibt dies folgenden Sachverhalt: Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut für $\sigma = \Re s > 0$, $\sigma' = \Re s' > 0$, $y = \Im \tau > 0$ und stellt in dem genannten Gebiet eine reguläre analytische Funktion von s, s' und τ dar. Als solche ist sie in das Gebiet $\sigma > -\frac{1}{2}$, $\sigma' > -1$, $y > 0$ regulär-analytisch fortsetzbar. Der Nullwert $P(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt weder von τ_0 noch von z_0 ab. In seiner Abhängigkeit von τ aber hat man ihn nach seinen analytischen Eigenschaften und seinem metrischen Verhalten als eine wohlbestimmte der elliptischen Quersummen der Differentialklasse aufzufassen. Von der Funktion $P(s, s, \tau, \tau, z, z)$ ($s = s'$, $\tau = \tau_0$, $z = z_0$) aus gelangt man nicht unmittelbar, sondern erst auf dem Umwege über eine etwas komplizierte Approximation zu den Reihen

$$\Xi_{-2}(s, \tau, H, N, \nu) = \sum_{B \in \mathfrak{G}(H, \Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i \nu}{\log \mu'}}}{(\beta_1\tau + \beta_2)(\beta_1'\tau + \beta_2')|\beta_1\tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}}|\beta_1'\tau + \beta_2'|^{\frac{s'}{2}}} \left(B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} \right),$$

die den eigentlichen Untersuchungsgegenstand bilden. Das Ziel der Untersuchung wird mit dem Nachweis der folgenden Sätze erreicht:

Die Reihen $\Xi_{-2}(s, \tau, H, N, \nu)$, die für $\Re s > 0$ und $\Im \tau > 0$ offenbar reguläre analytische Funktionen von s darstellen, lassen sich in eine volle Um-

gebung des Punktes $s = 0$ regulär-analytisch fortsetzen. Die Nullwerte $\Xi_{-2}(0, \tau, H, N, \nu)$ sind als Funktionen von τ ganze Spitzenformen von der Dimension -2 , deren metrisches Verhalten dem der hyperbolischen Quersummen in den Fällen absoluter Konvergenz ($r > 2$) genau entspricht.

Von den Anwendungen, die den großen Aufwand dieses Verfahrens vielleicht zu rechtfertigen vermögen, erwähne ich zwei. Zuvor seien einige grundlegende Tatsachen zusammengestellt.

Ist η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma = \Gamma(N)$, H eine reelle unimodulare Matrix mit $H\eta = 0$, $H\eta' = \infty$, so haben die Matrizen L von Γ mit den Fixpunkten η, η' die Gestalt

$$(3) \quad L = \pm H^k, \quad H = H^{-1} \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} H \quad (\mu\mu' = 1),$$

wo μ' eine gewisse feste Zahl > 1 bezeichnet und k die ganzen Zahlen durchläuft. Jede solche Matrix L bestimmt daher das Fixpunktpaar η, η' eindeutig, und wir wollen sagen, daß sie auch eine der zugehörigen Matrizen H bestimmt.

Im Falle $r = 2$, $\nu = 1$ hängen die ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -2, 1\}$ bei allgemeinem Γ von erster Art aufs engste mit den ABELSchen Differentialen des Γ zugeordneten algebraischen Gebildes zusammen. Führt man in einem solchen Differential als lokalen Parameter an der Stelle $\tau = \tau_0$ die Variable $\tau - \tau_0$ ein, so entsteht als Funktion von τ_0 eine ganze Spitzenform $\{\Gamma, -2, 1\}$; umgekehrt entsteht jede solche Form auf diese Weise.

Wir betrachten eine kanonische Zerschneidung der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{F}$ von Γ durch p geordnete Rückkehrschnittpaare. Der Überschreitung eines Rückkehrschnittes entspricht eine hyperbolische Substitution von Γ . Bei der üblichen Anordnung nennen wir einen Schnitt eines Paares primär oder sekundär, je nachdem man ihn bei Umlaufen des Kreuzungspunktes im positiven Sinne an erster oder zweiter Stelle trifft.

Wir formulieren nun als erste der genannten Anwendungen einen neuen, für $\Gamma = \Gamma(N)$ gültigen, von allen früher bewiesenen prinzipiell verschiedenen Vollständigkeitssatz wie folgt:

Den p primären oder den p sekundären Rückkehrschnitten auf der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{F}$ von Γ mögen die hyperbolischen Matrizen K_m ($1 \leq m \leq p$) etwa bei Überschreitung der Schnitte bei einem positiven Umlauf entsprechen. Jede Matrix K_m bestimme eine der den Fixpunkten von K_m zugeordneten Matrizen H_m . Dann bilden die p Funktionen

$$(4) \quad \Xi_{-2}(0, \tau, H_m, N, 0) \quad (1 \leq m \leq p)$$

eine Basis der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma(N), -2, 1\}$.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich wesentlich auf zwei Sachverhalte, die wir hier gesondert hervorheben. Sei in den Bezeichnungen unter (3):

$H = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 \end{pmatrix}$. Eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau) \in \{\Gamma, -2, 1\}$ gestattet eine Entwicklung von der Gestalt

$$\varphi(\tau) = (\eta_1 \tau + \eta_2)^{-1} (\eta'_1 \tau + \eta'_2)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(H, \varphi) (H\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}.$$

Dann weiß man *erstens*: Die Periode $\omega(H, \varphi)$, die das Integral von erster Gattung

$$w(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau) d\tau$$

bei Anwendung von H aufnimmt [kurz H -Periode von $\varphi(\tau)$ genannt] hat den Wert $2 \log \mu' \cdot b_0(H, \varphi)$. *Zweitens* aber gibt die Grundformel (J IV), (27):

$$(\varphi(\tau), \Xi_{-2}(0, \tau, H, N, 0)) = 4 \pi \log \mu' \cdot b_0(H, \varphi) = 2 \pi \omega(H, \varphi).$$

Auf diesen beiden Tatsachen beruht auch die zweite Anwendung der Reihen $\Xi_{-2}(s, \tau, H, N, 0)$, indem die zwischen den Skalarprodukten und den Perioden hergestellte Beziehung auf einen Ansatz zur *Berechnung der Integralperioden von $\Gamma(N)$* führt. Setzt man in der letzten Gleichung für $\varphi(\tau)$ eine parabolische Quersumme, etwa $G(\tau, \nu) = G_{-2}(\tau, I, N, \nu)$ ein, so erhält man einerseits 2π mal der H -Periode von $G(\tau, \nu)$, andererseits nach Vertauschung der Faktoren im Skalarprodukt den Wert $\frac{N^2}{2\pi} \overline{b_v(I, \Xi(\tau, H))}$, insgesamt also

$$(5) \quad \omega(H, G(\tau, \nu)) = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \overline{b_v(I, \Xi(\tau, H))}.$$

Dabei steht $\Xi(\tau, H)$ für $\Xi_{-2}(0, \tau, H, N, 0)$, und $b_v(I, \varphi)$ bezeichnet den ν -ten Fourierkoeffizienten von $\varphi(\tau)$ (in der Entwicklung nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}$).

Man hat also zur Bestimmung der H -Periode von $G(\tau, \nu)$ nur den ν -ten Fourierkoeffizienten von $\Xi(\tau, H)$ zu berechnen. Insbesondere erhält man nach (J. III), Satz 18 die H -Perioden einer Basis der Schar der ganzen Spitzenformen, indem man in (5) für ν geeignete p natürliche Zahlen einsetzt; hier bezeichnet $p = p(N)$ das Geschlecht von $\Gamma(N)$, und es ist in dem zitierten Satz $\Gamma = \Gamma(N)$, $r = 2$, $v = 1$ und $\mu = p = p(N)$ einzutragen. Ein zugleich funktionentheoretisch wie arithmetisch ausgezeichnetes System solcher Zahlen ν wird durch $\nu = m_i + 1$ ($1 \leq i \leq p$) gegeben; dabei bilden die m_i

die WEIERSTRASSischen Lückenzahlen des Punktes $\tau = \infty$ auf dem algebraischen Gebilde von $\Gamma(N)$. — Wenn es schließlich noch auf irgendeine Weise gelingt, zu einer passenden kanonischen Zerschneidung der RIEMANNschen Fläche $\mathfrak{F}$ von $\Gamma(N)$ ein System von Matrizen H_m ($1 \leq m \leq p$) im Sinne von (4) sowohl für die primären als auch für die sekundären Rückkehrschnitte explizit zu bestimmen, so ergibt sich nach dem angedeuteten Verfahren ein vollständiges Periodengitter der $\Gamma(N)$ in expliziter Darstellung.

Zweifelloos wird es zur Ausgestaltung und Durchführung dieses Ansatzes noch erheblicher Vorarbeiten bedürfen; immerhin aber scheint hier eine Möglichkeit vorzuliegen, um neuartige strukturelle Zusammenhänge zu erschließen.

Die vorliegende Untersuchung zerfällt in fünf Paragraphen. § 1 enthält die Darstellung der unter (2) angedeuteten Zusammenhänge. Die §§ 2, 3, 4 dienen der Herleitung der Hauptergebnisse über die Quersummen Ξ_{-2} . Im Schlußparagraphen der Arbeit werden neben dem zitierten neuen Vollständigkeitssatz über die Funktionen $\Xi_{-2}(0, \tau, H, N, 0)$ noch einige neue Sätze über die in (J III), § 1 erklärten *Hauptssysteme* bewiesen. Mit Hilfe einer Aussage über das Verhalten ganzer Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ ($r > 0$, $|v| = 1$) bei Annäherung an die reelle Achse wird gezeigt, daß es stets, auch unter verschärfenden Nebenbedingungen, unendlich viele Hauptssysteme gibt.

Mit der gegenwärtigen Abhandlung wird die allgemeine Theorie der strukturellen Beziehungen zwischen POINCARÉschen Reihen und Scharen automorpher Formen zu einem gewissen Abschluß gebracht, insofern als nunmehr Resultate gleicher Art und Entwicklungen gleicher Tragweite für die POINCARÉschen Reihen aller drei Typen in den Formenklassen $\{\Gamma, -r, v\}$ mit $r > 2$, $|v| = 1$ und — nach Anwendung der dargestellten Summationsverfahren — auch mit $r = 2$, $v = 1$ vorliegen.

Bezeichnungen und Grundlagen.

Im folgenden treten nur quadratische zweireihige Matrizen auf. Eine solche Matrix heißt reell, wenn ihre Elemente reell sind, unimodular, wenn ihre Determinante gleich 1 ist. Eine reelle unimodulare Matrix nennen wir *normiert*.

Eine Grenzkreisgruppe wird zunächst so erklärt, daß die reelle Achse als Grenzkreis, die obere Halbebene als sein Inneres fungiert. Ferner gehen wir nicht von den Substitutionen der Gruppe, sondern von deren Koeffizientenschemata aus. Es wird demnach eine Gruppe Γ von normierten Matrizen zugrunde gelegt. Die Einheitsmatrix nennen wir I ; da man bei Gruppen eines gewissen Typus das Auftreten der Matrix $-I$ nicht verhindern kann,

nehmen wir stets an, daß $-I$ in Γ liegt, was die Allgemeinheit der Substitutionsgruppen nicht beeinträchtigt. Γ sei diskret, d. h. Γ enthalte keine Folge von paarweise verschiedenen Matrizen, die elementweise gegen I konvergiert.

Jeder normierten Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ordnen wir die lineare Transformation

$$\tau' = S(\tau) = S\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

in der komplexen Variablen τ zu. Die Bezeichnung $S\tau$ stellt die einzige Inkonsequenz gegenüber der sonst verbindlichen Matrizenschreibweise dar. Vermöge dieser Zuordnung entspricht die Substitution $\tau' = S\tau$ eineindeutig dem normierten Matrizenpaar $\pm S$; die Zuordnung bleibt erhalten, wenn man einerseits zwei Matrizen multipliziert, andererseits die zugehörigen Substitutionen in funktionaler Schreibweise hintereinander anwendet. Zwei Punkte τ, τ' der oberen Halbebene heißen einander nach Γ äquivalent, in Zeichen $\tau' \sim \tau(\Gamma)$, wenn ein L in Γ existiert, so daß $\tau' = L\tau$. Die obere Halbebene der komplexen Variablen τ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$.

Nach bekannten Sätzen von POINCARÉ ist eine diskrete Gruppe in der oberen Halbebene eigentlich diskontinuierlich, d. h. die zu einem festen Punkte äquivalenten Punkte häufen sich in $\mathfrak{H}$ nicht, und jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ hat von den zu ihm äquivalenten Punkten, soweit sie von ihm verschieden sind, einen positiven Minimalabstand. Die bekannte Konstruktion eines Normalpolygons $\mathfrak{N}$ von Γ liefert in $\mathfrak{N}$ einen Fundamentalbereich von Γ . Γ heißt eine Grenzkreisgruppe, wenn das Parkett der zu $\mathfrak{N}$ äquivalenten Bereiche $L\mathfrak{N}$ ($L \in \Gamma$) sich gegen die ganze reelle Achse verdichtet. Die durch Einbeziehung der elliptischen und parabolischen Fixpunkte und durch Ränderzuordnung aus dem Normalpolygon $\mathfrak{N}$ entstehende RIEMANNSche Fläche $\mathfrak{F}$ kann offen oder geschlossen sein. Sie ist dann und nur dann geschlossen, wenn Γ ein endliches Erzeugendensystem besitzt, oder wenn $\mathfrak{N}$ einen endlichen hyperbolischen Flächeninhalt hat, oder wenn Γ ein algebraisches Gebilde mit endlich vielen durch die Fixpunkte vorgeschriebenen Relativverzweigungen uniformisiert; diese drei Bedingungen sind sämtlich miteinander gleichbedeutend. Werden sie von der Gruppe Γ erfüllt, so heißt Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, im anderen Falle eine solche von zweiter Art. Es sei Γ von erster Art. Der kanonischen Zerschneidung von $\mathfrak{F}$ und dem Aufbau der universellen, in vorgeschriebener Art verzweigten Überlagerungsfläche aus Blättern der zerschnittenen Fläche entspricht genau die Aufteilung der oberen Halbebene in kanonische Fundamentalbereiche. Insbesondere enthält ein kanonischer Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ von Γ von jedem System untereinander äquivalenter elliptischer oder parabolischer Fixpunkte genau einen Vertreter und zu diesem in dessen Nähe eine volle Umgebung von nach Γ in-

äquivalenten Punkten. Demnach treten neben das Geschlecht p_0 von Γ als formale Daten der Gruppe die Anzahlen σ_0 der parabolischen, e_0 der elliptischen Fixpunkte, sowie die Ordnungen dieser e_0 elliptischen Fixpunkte, d. h. jeweils die Ordnung l_k ($1 \leq k \leq e_0$) der zyklischen Substitutionsgruppe in Γ mit dem betreffenden Fixpunkt.

Wir schreiben für beliebiges reelles ξ und für reelles $\lambda \neq 0$

$$U^\xi = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

und bezeichnen für beliebiges $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\underline{S} = \{c, d\}$ die zweite Zeile von S .

Ein parabolischer Fixpunkt $\tau = \zeta$ von Γ liegt entweder auf der reellen Achse oder im Unendlichen. Bestimmt man eine normierte Matrix A mit $A\zeta = \infty$, so erhält man alle Matrizen L aus Γ mit dem Fixpunkt ζ in der Gestalt

$$L = \pm A^{-1} U^{kN} A = \pm P^k, \quad P = A^{-1} U^N A,$$

wo k die ganzen Zahlen durchläuft und N eine gewisse feste positive Zahl angibt. Die von diesen Matrizen $L = \pm P^k$ gebildete Gruppe nennen wir $\mathfrak{Z}_\zeta$; P heißt die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$. N hängt nicht nur von ζ , sondern auch von A ab. Zwei Matrizen M und M^* aus der Nebengruppe $A\Gamma$ haben dann und nur dann die gleiche zweite Zeile, wenn $M^* = U^{kN} M$ mit ganzem k . Ein volles System von Matrizen M aus $A\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(A, \Gamma)$.

Jede Komponente eines Paares hyperbolischer Fixpunkte η, η' von Γ liegt gleichfalls auf der reellen Achse oder im Unendlichen. Es ist aber niemals ein Punkt zugleich parabolischer und hyperbolischer Fixpunkt einer diskreten Gruppe von normierten Matrizen. Bestimmt man eine normierte Matrix H mit $H\eta = 0, H\eta' = \infty$, so erhält man alle Matrizen L aus Γ mit dem Fixpunktepaar η, η' in der Gestalt

$$L = \pm H^{-1} D_{\mu'}^k H = \pm H^k, \quad H = H^{-1} D_{\mu'} H,$$

wo k die ganzen Zahlen durchläuft und μ' eine gewisse feste Zahl > 1 angibt. Die von diesen Matrizen $L = \pm H^k$ gebildete Gruppe nennen wir $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$; H heißt die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$. Zwei Matrizen B und B^* aus der Nebengruppe $H\Gamma$ unterscheiden sich dann und nur dann um einen linken Faktor D_λ mit positivem λ , wenn $B^* = D_{\mu'}^k B$ mit ganzem k . Ein volles System von Matrizen B aus $H\Gamma$, die sich nicht zu je zweien um einen linken Faktor D_λ ($\lambda > 0$) unterscheiden, bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}(H, \Gamma)$.

Für festes μ mit $\Im \mu \leq 0$ und τ in $\mathfrak{H}$ sei

$$0 < \arg(\tau - \mu) < \pi.$$

Für feste m_1, m_2 , die nicht beide verschwinden, und τ in $\mathfrak{H}$ setzen wir

$$\arg(m_1 \tau + m_2) = \arg\left(\tau + \frac{m_2}{m_1}\right) + \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn} m_1 - 1) \quad (m_1 \neq 0),$$

$$\arg m_2 = -\frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn} m_2 - 1).$$

Sei S eine normierte Matrix, $\underline{S} = \{c, d\}$. Wir ergänzen die Zeile $\{m_1, m_2\}$ zu einer weiteren normierten Matrix M mit $\underline{M} = \{m_1, m_2\}$ und schreiben $M' = MS$, $\underline{M'} = \{m'_1, m'_2\}$. Dann gilt für τ in $\mathfrak{H}$

$$\arg(m_1 S \tau + m_2) = \arg(m'_1 \tau + m'_2) - \arg(c \tau + d) + 2\pi w(M, S)$$

mit ganzem $w(M, S) = 0$ oder ± 1 . Für komplexes r und für τ in $\mathfrak{H}$ erklären wir ferner

$$(m_1 \tau + m_2)^r = e^{r \log(m_1 \tau + m_2)},$$

$$\log(m_1 \tau + m_2) = \log|m_1 \tau + m_2| + i \arg(m_1 \tau + m_2).$$

Wird hier

$$\sigma(M, S) = \sigma^r(M, S) = e^{2\pi i r w(M, S)}$$

gesetzt, so gilt

$$(m_1 S \tau + m_2)^r = \sigma^r(M, S) (m'_1 \tau + m'_2)^r (c \tau + d)^{-r}.$$

Von den Rechenregeln für die Symbole $w(M, S)$ und $\sigma(M, S)$ nennen wir die beiden Assoziativgesetze: Es seien M_1, M_2, M_3 drei normierte Matrizen. Dann bestehen die Formeln

$$w(M_1, M_2) + w(M_1 M_2, M_3) = w(M_1, M_2 M_3) + w(M_2, M_3),$$

$$\sigma^r(M_1, M_2) \sigma^r(M_1 M_2, M_3) = \sigma^r(M_1, M_2 M_3) \sigma^r(M_2, M_3).$$

Zur genaueren Orientierung über die genannten Symbole verweisen wir auf (G I), § 1. Dort finden sich auch die Definitionen und die Darstellung der Grundeigenschaften der zur Gruppe Γ und zur Dimension $-r$ gehörigen Multiplikatorsysteme sowie der automorphen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$.

Die Begriffe der hyperbolischen Geometrie kennzeichnen wir durch Vorsetzen des Buchstabens H, die der euklidischen Geometrie durch Vorsetzen des Buchstabens E vor den Begriffsnamen (z. B. H-Kreis, H-Radius, E-Mittelpunkt, H-Abstand, H-Inhalt, E-Gerade, H-Gerade usw.).

Es sei N eine natürliche Zahl. Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N besteht aus den ganzzahligen Matrizen L mit

$$\|L\| = 1, \quad L \equiv \pm I \pmod{N}.$$

$\Gamma(N)$ ist eine Grenzkreisgruppe von erster Art, Untergruppe von endlichem Index der Modulgruppe $\Gamma(1)$ und enthält für $N > 1$ keine elliptischen Matrizen. Ein parabolischer Fixpunkt ζ von $\Gamma(N)$ ist eine rationale Zahl oder liegt im Unendlichen. Bestimmt man eine Matrix A aus $\Gamma(1)$ mit $A\zeta = \infty$, so ist $P = A^{-1}U^N A$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$. Bei Grenzkreisgruppen werden die parabolischen Fixpunkte auch (parabolische) Spitzen genannt.

Hinweise auf bereits zitierte, mit Abkürzungen eingeführte frühere Darstellungen werden in eckigen Klammern gegeben. Ausführliche Erläuterungen zu den Gegenständen der vorliegenden Untersuchungen findet man in (GV).

Mit $C_1, C_2, C_3, \dots$ werden Konstante bezeichnet; dabei werden gelegentlich die Größen, von denen eines dieser C_i abhängen darf, diesem als Argumente in Klammern beigefügt.

§ 1.

Entwicklung einer elliptischen Quersumme in eine unendliche Reihe nach hyperbolischen Quersummen.

Es sei Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art, $r > 2$, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r, |v| \equiv 1$, $\tau = x + iy$ (x reell, $y > 0$) $z = a + ib$ (a reell, $b > 0$); ferner η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte

von Γ , $H = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix mit $H\eta = 0$, $H\eta' = \infty$,

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, also $H' = -TH = \begin{pmatrix} -\eta'_1 & -\eta'_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$, und schließlich

$$H = H^{-1}D_{\mu'}H = H'^{-1}D_{\mu}H' \quad \text{mit} \quad D_{\mu'} = \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (\mu\mu' = 1, \mu' > 1)$$

normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$.

Bezeichnet $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix, so erklären wir, wenn $z \in \mathfrak{H}$,

$$\arg(c\bar{z} + d) = \arg\left(\bar{z} + \frac{d}{c}\right) - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} c - 1) \quad (c \neq 0),$$

$$\arg d = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} d - 1) \quad (c = 0),$$

$$-\pi < \arg\left(\bar{z} + \frac{d}{c}\right) < 0 \quad (c \neq 0),$$

[vgl. (G I), (9)]; $\arg d$ hängt also davon ab, in welcher Halbebene operiert wird, und es gilt allgemein

$$\arg(cz + d) + \arg(c\bar{z} + d) = 0.$$

Bei komplexem r wird nun

$$(S\tau - S\bar{z})^r = \varepsilon_r(S) \frac{(\tau - \bar{z})^r}{(c\tau + d)^r (c\bar{z} + d)^r}, \quad \varepsilon_r(S) = e^{2\pi i r u(S)},$$

$$\arg(S\tau - S\bar{z}) = \arg(\tau - \bar{z}) - \arg(c\tau + d) - \arg(c\bar{z} + d) + 2\pi u(S).$$

Für $c = 0$ ergibt sich

$$S\tau - S\bar{z} = \frac{a}{d}(\tau - \bar{z}) = a^2(\tau - \bar{z}), \quad u(S) = 0.$$

Für $c \neq 0$ berücksichtigen wir $0 < \arg(S\tau - S\bar{z}) < \pi$, $0 < \arg(\tau - \bar{z}) < \pi$, setzen $\tau = z$ und erhalten $u(S) = 0$, so daß

$$(7) \quad (S\tau - S\bar{z})^r = \frac{(\tau - \bar{z})^r}{(c\tau + d)^r (c\bar{z} + d)^r}.$$

Wir untersuchen die absolut konvergente elliptische Quersumme

$$P(\tau, z) \equiv \Phi_{-r}(\tau, v, z, \Gamma) = \sum_{L \in \Gamma} \frac{1}{v(L) (\gamma\tau + \delta)^r (L\tau - \bar{z})^r},$$

in der $r > 2$, $\underline{L} = \{\gamma, \delta\}$ [(J IV), (8)]. Es durchlaufe $B = HL = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$ die Nebengruppe $H\Gamma$, und es sei

$$B' = -TB = H'L = \begin{pmatrix} -\beta'_1 & -\beta'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad u = Hz.$$

Dann finden wir vermöge (7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(L\tau - \bar{z})^r} &= \frac{1}{(H^{-1}B\tau - H^{-1}\bar{u})^r} = \frac{(-\eta'_1 B\tau + \eta_1)^r (-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^r}{(B\tau - \bar{u})^r}, \\ (-\eta'_1 B\tau + \eta_1)^r &= \sigma(H^{-1}, B) \frac{(\gamma\tau + \delta)^r}{(\beta'_1 \tau + \beta'_2)^r}, \quad \sigma(H^{-1}, B) = \frac{\sigma(H^{-1}, H)}{\sigma(H, L)}, \\ \frac{1}{v(L) (\gamma\tau + \delta)^r (L\tau - \bar{z})^r} &= \sigma(H^{-1}, H) (-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^r \frac{1}{\sigma(H, L) v(L) (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^r (B\tau - \bar{u})^r} \\ &= \frac{\sigma(H^{-1}, H)}{\sigma^*(-T, H)} v(H) (-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^r \frac{1}{v(B) (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}} (B\tau - \bar{u})^r}. \end{aligned}$$

Hier steht σ für σ^r , σ^* für $\sigma^{\frac{r}{2}}$. Die letzte Gleichung beruht auf

$$(B\tau)^{\frac{r}{2}} = \sigma^*(-T, B) \frac{(\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}}}{(\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}}}$$

sowie bei willkürlichem $v(H)$ des Betrages 1 auf der Erklärung von $v(B)$ in (G V), § 1, 3.

Wir bestimmen einen willkürlichen Punkt $\tau = \tau^0$ in $\mathfrak{H}$, für den die Ungleichung $\mu'^{-1} < |\tau^0| < \mu'^{+1}$ zutrifft, und sodann ein System $\mathfrak{S}(H, \Gamma)$ durch

$$(8) \quad B \subset \mathfrak{S}(H, \Gamma): \quad \mu'^{-1} \leq |B\tau^0| < \mu'^{+1}.$$

Wir erhalten mit $e^{2\pi i \kappa} = v(H)$ ($0 \leq \kappa < 1$) nach (G V), (11)

$$(9) \quad P(\tau, z) = \frac{\sigma(H^{-1}, H)}{\sigma^*(-T, H)} v(H) (-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^r \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{r}{2}} f(B\tau, u)}{v(B) (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}}},$$

$$f(\tau, u) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \kappa h}}{(\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u})^r}.$$

Wir setzen

$$\tau = R e^{i\vartheta} \quad (R > 0, \quad 0 < \vartheta < \pi), \quad u = \varrho e^{i\omega} \quad (\varrho > 0, \quad 0 < \omega < \pi),$$

$$\sqrt{\tau \bar{u}} = \sqrt{R \varrho} e^{i \frac{\vartheta - \omega}{2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{\tau}{u}} = \lambda e^{i\chi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{R}{\varrho}}, \quad \chi = \frac{\vartheta + \omega}{2},$$

und beschränken τ und u auf eine H -Kreisscheibe. Dann liegt auch ζ auf einer H -Kreisscheibe $\mathfrak{k}$, und man findet zunächst

$$\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u} = \sqrt{\tau \bar{u}} (\mu'^h \zeta - \mu'^{-h} \bar{\zeta}^{-1}),$$

$$(\mu'^h \tau - \mu'^{-h} \bar{u})^r = \sqrt{\tau \bar{u}}^r (\mu'^h \zeta - \mu'^{-h} \bar{\zeta}^{-1})^r,$$

wo $\arg \sqrt{\tau \bar{u}} = \frac{\vartheta - \omega}{2}$ und die Argumente der beiden letzten Klammern zwischen 0 und π liegen. Da außerdem $\sqrt{\tau \bar{u}}^r = \tau^{\frac{r}{2}} \bar{u}^{-\frac{r}{2}}$, so wird

$$(10) \quad \tau^{\frac{r}{2}} f(\tau, u) = \bar{u}^{-\frac{r}{2}} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \kappa h}}{(\mu'^h \zeta - \mu'^{-h} \bar{\zeta}^{-1})^r}.$$

Mit der komplexen Variablen $w = w_1 + i w_2$ (w_1, w_2 reell) bilden wir die neue Funktion

$$(11) \quad \varphi(\zeta, w) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i \kappa (h+w)}}{(\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \bar{\zeta}^{-1})^r},$$

wo $\mu'^w = e^{w \log \mu'}$, $\log \mu' > 0$. Da

$$\Im(\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \bar{\zeta}^{-1}) = (\mu'^{h+w_1} \lambda + \mu'^{-h-w_1} \lambda^{-1}) \sin(\chi + w_2 \log \mu'),$$

so konvergiert die Reihe (11) für ζ auf $\mathfrak{k}$, für beschränktes $|w_1|$ und für $|w_2| \leq \varepsilon_0$ bei hinreichend kleinem $\varepsilon_0 > 0$ gleichmäßig absolut, und es ergibt sich nach bekanntem Vorgehen

$$(12) \quad \bar{u}^{\frac{r}{2}} \tau^{\frac{r}{2}} f(\tau, u) = \varphi(\zeta, 0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\zeta),$$

$$(13) \quad A_m(\zeta) = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i(m+\kappa)w}}{(\mu'^w \zeta - \mu'^{-w} \zeta^{-1})^r} dw = e^{2\pi i(m+\kappa) \frac{\log \zeta}{\log \mu'}} B_r(\mu', m+\kappa),$$

$$B_r(\mu', m+\kappa) = \int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty} \frac{e^{-2\pi i(m+\kappa)v}}{(\mu'^v - \mu'^{-v})^r} dv.$$

Hier wird mit $0 < \gamma + \alpha \log \mu' < \pi$, $0 < \beta \log \mu' < \pi$ geradlinig integriert. Bei festen r , μ' und wachsendem $|m|$ bestehen die Abschätzungen

$$(14) \quad \begin{aligned} B_r(\mu', m+\kappa) &= O(e^{2\pi(m+\kappa)\varepsilon}) & (\varepsilon > 0, m+\kappa > 0), \\ B_r(\mu', m+\kappa) &= O\left(e^{2\pi(m+\kappa)\left(\frac{\pi}{\log \mu'} - \varepsilon\right)}\right) & (\varepsilon > 0, m+\kappa < 0); \end{aligned}$$

sie zeigen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (12) für ζ auf $\mathfrak{k}$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Zur Berechnung von $B_r(\mu', \varrho)$ setze man $\beta = \frac{\pi}{2 \log \mu'}$, $v = \frac{i}{\log \mu'} + i\beta$. Dadurch erscheint im Nenner des Integranden der Ausdruck $(e^v + e^{-v})^r$; eine naheliegende Substitution führt auf ein EULERSCHES **B**-Integral und zu dem Wert

$$(15) \quad B_r(\mu', \varrho) = \frac{1}{2 \log \mu'} e^{-\pi i \left(\frac{r}{2} + \frac{\pi i \varrho}{\log \mu'} \right)} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2} + \frac{\pi i \varrho}{\log \mu'}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - \frac{\pi i \varrho}{\log \mu'}\right)}{\Gamma(r)}.$$

Insgesamt also gewinnt man aus (9), (12), (13) und mit Rücksicht auf

$$\log \zeta = \frac{1}{2} \log \tau - \frac{1}{2} \log \bar{u},$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} P(\tau, z) &= \frac{\sigma(H^{-1}, H)}{\sigma^*(-T, H)} v(H) (-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^r \bar{u}^{-\frac{r}{2}} \times \\ &\times \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{1}{v(B) (\beta_1 \tau + \beta_2)^{\frac{r}{2}} (\beta'_1 \tau + \beta'_2)^{\frac{r}{2}}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_r(\mu', m+\kappa) \bar{u}^{-\pi i \frac{m+\kappa}{\log \mu'}} (B\tau)^{\pi i \frac{m+\kappa}{\log \mu'}}. \end{aligned}$$

Die Vertauschbarkeit der Summen auf der rechten Seite folgt unmittelbar aus der für alle B in $\mathfrak{S}(H, \Gamma)$ und alle u auf einer festen H -Kreisscheibe

gleichmäßigen absoluten Konvergenz der inneren Summe, sowie aus der weiter unten zitierten Konvergenz der Reihe (17a). Die gleichmäßige absolute Konvergenz der inneren Summe beruht auf (14) und auf dem Umstand, daß für alle ϑ mit $0 < \vartheta < \pi$:

$$6) \quad \arg \zeta = \chi = \frac{\vartheta + \omega}{2}, \quad \frac{\varepsilon_0}{2} \leq \chi \leq \pi - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \text{falls nur } \varepsilon_0 \leq \omega \leq \pi - \varepsilon_0.$$

Setzt man ferner in dem Faktor vor dem Summenzeichen $u = Hz$, so erhält dieser die Gestalt $v(H) (\eta_1 \bar{z} + \eta_2)^{-\frac{r}{2}} (\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2)^{-\frac{r}{2}}$. Mit der Bedeutung von $\Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, m)$ aus (J IV), (10) besteht also die Beziehung

$$7) \quad P(\tau, z) = v(H) (\eta_1 \bar{z} + \eta_2)^{-\frac{r}{2}} (\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2)^{-\frac{r}{2}} \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_r(\mu', m + \kappa) (H \bar{z})^{-\pi i \frac{m + \kappa}{\log \mu'}} \Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, m).$$

Die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite von (17)

folgt sich nach (16) leicht aus der trivialen Abschätzung von $\left| (B \tau)^{\pi i \frac{m + \kappa}{\log \mu'}} \right|$ nach oben und der für die τ auf einer H -Kreisscheibe gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$7a) \quad \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} |\beta_1 \tau + \beta_2|^{-\frac{r}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{-\frac{r}{2}}$$

abschließen.

Dieses Konvergenzverhalten ermöglicht nun die eingangs angedeutete Integraldarstellung der hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, \nu)$ durch die elliptische Quersumme $P(\tau, z)$. Man entnimmt (17) für $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ und ganzes ν , daß

$$8) \quad v(H)^{-1} \int_{\lambda=\lambda_0}^{\mu'^2 \lambda_0} P(\tau, H^{-1}(\lambda u)) \times \\ \times (\eta_1 H^{-1}(\lambda \bar{u}) + \eta_2)^{\frac{r}{2}} (\eta'_1 H^{-1}(\lambda \bar{u}) + \eta'_2)^{\frac{r}{2}} (\lambda \bar{u})^{\pi i \frac{\nu + \kappa}{\log \mu'}} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ = 2 \log \mu' B_r(\mu', \nu + \kappa) \Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, \nu).$$

Zum Schluß dieses Abschnittes zeigen wir noch, daß sich die Berechnung des Skalarproduktes $(\varphi(\tau), P(\tau, z))$ für eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau)$ aus der Formenklasse $\{\Gamma, -r, \nu\}$ auf die Werte der Skalarprodukte

$$(\varphi(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, \nu))$$

zurückführen läßt. Sei also

$$\varphi(\tau) = (\eta_1 \tau + \eta_2)^{-\frac{r}{2}} (\eta'_1 \tau + \eta'_2)^{-\frac{r}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(\mathbf{H}\tau) \pi i \frac{n+\kappa}{\log \mu'}$$

die Entwicklung von $\varphi(\tau)$ nach der Ortsvariablen $\mathbf{H}\tau$ des Fixpunktpaares η, η' . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (17) und nach der Grundformel

$$(19) \quad (\varphi(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, \mathbf{H}, \Gamma, v)) = v(\mathbf{H}) \varepsilon_r(v, \mu') b_v$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (\varphi(\tau), \mathbf{P}(\tau, z)) &= v(\mathbf{H})^{-1} (\eta_1 z + \eta_2)^{-\frac{r}{2}} (\eta'_1 z + \eta'_2)^{-\frac{r}{2}} \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{B_r(\mu', m + \kappa)} (\mathbf{H}z)^{\pi i \frac{m+\kappa}{\log \mu'}} v(\mathbf{H}) \varepsilon_r(m, \mu') b_m. \end{aligned}$$

Hier werden wir beweisen, daß $\overline{B_r(\mu', m + \kappa)} \varepsilon_r(m, \mu')$ mit dem Werte $\xi_r = \frac{2\pi}{r-1} 2^{2-r} e^{\pi i \frac{r}{2}}$ aus (J IV), (52) übereinstimmt. Damit haben wir dann in der Tat gefunden, daß

$$(20) \quad (\varphi(\tau), \mathbf{P}(\tau, z)) = \xi_r \varphi(z);$$

im übrigen ist dies die Formel (J IV), (52), wenn noch berücksichtigt wird, daß nach (J IV), (28):

$$\mathbf{P}(\tau, z) = \Phi_{-r}(\tau, -\bar{z}, 0).$$

Die zu beweisende Gleichung

$$(21) \quad \overline{B_r(\mu', m + \kappa)} \varepsilon_r(m, \mu') = \frac{2\pi}{r-1} 2^{2-r} e^{\pi i \frac{r}{2}} = \xi_r$$

bedeutet nach (J IV), (26a) und (J V), (15), daß für reelles $t = 2\pi \frac{m+\kappa}{\log \mu'} = \frac{2\pi \varrho}{\log \mu'}$ und $r > 2$:

$$\int_0^\pi e^{-tv} \sin^{r-2} v dv = \pi 2^{2-r} e^{-\frac{\pi}{2}t} \frac{\Gamma(r-1)}{\Gamma\left(\frac{r}{2} + i\frac{t}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2} - i\frac{t}{2}\right)}.$$

Man ersetze hier v durch $\frac{\pi}{2} + x$ und $r-2$ durch u ($u > 0$). Dann handelt es sich um die Formel

$$(22) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-tx} \cos^u x dx = \pi 2^{-u} \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma\left(\frac{u+2+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{u+2-it}{2}\right)}.$$

Die linke Seite fassen wir bei festem t als eine Funktion $g(u)$ von u auf. Nach der LAPLACESchen Transformationstheorie gilt ²⁾

$$(23) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} g(u) = \sqrt{2\pi}.$$

Ferner besteht die Identität

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ -t e^{-tx} \cos^{u+2} x + (u+2) e^{-tx} \cos^{u+1} x \sin x \} \\ = (t^2 + (u+2)^2) e^{-tx} \cos^{u+2} x - (u+1)(u+2) e^{-tx} \cos^u x; \end{aligned}$$

aus ihr folgt

$$g(u) = \frac{(u+2+it)(u+2-it)}{(u+1)(u+2)} g(u+2).$$

Setzt man nun

$$\varphi(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+2+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{u+2-it}{2}\right)}{\Gamma(u+1)} 2^u g(u),$$

so erhält man einerseits $\varphi(u) = \varphi(u+2)$, andererseits liefert die STIRLINGSche Formel, zusammen mit (23), für $u \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= 2^u \sqrt{2\pi} \left(\frac{u+it}{2}\right)^{\frac{u+it}{2} + \frac{1}{2}} \left(\frac{u-it}{2}\right)^{\frac{u-it}{2} + \frac{1}{2}} u^{-u-\frac{1}{2}} e^{o(1)} g(u) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} \frac{\sqrt{u^2+t^2}}{u} \left(\frac{u+it}{u-it}\right)^{\frac{it}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{u^2}\right)^{\frac{u}{2}} e^{o(1)} g(u), \end{aligned}$$

mithin $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = \pi$. Insgesamt wird also für jedes u

$$\varphi(u) = \varphi(u+2) = \dots = \varphi(u+2n) = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(u+2n) = \pi.$$

Damit sind die Formeln (20), (21), (22) bewiesen ³⁾.

Natürlich kann man aus der Integraldarstellung (18) und der Grundformel (20) für das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform mit einer elliptischen Quersumme umgekehrt die Grundformel (19) für das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform mit einer hyperbolischen Quersumme ableiten. Wir verzichten indessen auf dieses Vorgehen, da wir diesen Zusammenhang in den folgenden Paragraphen unter weit schwierigeren Verhältnissen herstellen wollen.

²⁾ Im vorliegenden Sonderfall am einfachsten bei POLYA-SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, S. 78. Berlin, Springer, 1925.

³⁾ Den hier dargestellten einfachen Beweis verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn H. KNESER vom 28. 3. 1941. H. MAASS zitiert in derselben Sache: E. E. KUMMER, De integralibus definitis et seriebus infinitis. Crelles Journal für d. reine u. angew. Math. 17 (1837), Nr. 11, S. 210–227, siehe insbesondere Gl. (31), (32), S. 217.

§ 2.

Die Funktion $P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$.

1. Definition, Konvergenz, erste Umformung.

Es sei zunächst noch Γ eine beliebige Grenzkreisgruppe von erster Art; Γ habe den parabolischen Fixpunkt ∞ . Es seien

$$s = \sigma + it, \quad s' = \sigma' + it', \quad \tau = x + iy, \quad \tau_0 = x_0 + iy_0, \\ z = a + ib, \quad z_0 = a_0 + ib_0$$

die Zerlegungen der komplexen Variablen $s, s', \tau, \tau_0, z, z_0$ in Real- und Imaginärteile. Von diesen seien

$$\sigma > 0, \quad \sigma' \geq 0, \quad y > 0, \quad y_0 > 0, \quad b > 0, \quad b_0 > 0.$$

Wir setzen mit $M = \begin{pmatrix} m_0 & m_3 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$:

$$P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{M \in \Gamma} (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s} (M\tau - \bar{z})^{-2} |M\tau_0 - \bar{z}_0|^{-s'}.$$

Bezeichnet U^N die normierte Erzeugende von $\mathfrak{S}_\infty$, $\tau^0 = x^0 + iy^0$ einen festgewählten Punkt mit $-\frac{N}{2} < x^0 < +\frac{N}{2}$, $y_0 > 0$, $\mathfrak{S}_0$ das System

$$(24) \quad M \in \mathfrak{S}_0: \quad -\frac{N}{2} \leq \operatorname{Re} M\tau^0 < +\frac{N}{2},$$

so findet man

$$(25a) \quad P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$$

$$= \sum_{M \in \mathfrak{S}_0} (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s} f_0\left(s', \frac{M\tau - \bar{z}}{N}, \frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N}\right),$$

$$(25b) \quad f_0(s', w, w_0) = N^{-2-s'} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (w+h)^{-2} |w_0+h|^{-s'},$$

$$w = \frac{M\tau - \bar{z}}{N}, \quad w_0 = \frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N}.$$

Es mögen τ, τ_0, z, z_0 sämtlich auf einer festen H-Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ liegen, es sei $\sigma \geq \alpha_0$ ($\alpha_0 > 0$), $\sigma' \geq 0$, s und s' beschränkt und τ^0 in $\mathfrak{k}$ enthalten. Die zu P gehörige Betragreihe läßt sich auf die Form

$$(26) \quad N^{-2-s'} \sum_{M \in \mathfrak{S}_0} |m_1 \tau + m_2|^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-\sigma} \times \\ \times \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{M\tau - \bar{z}}{N} + h \right|^{-2} \left| \frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N} + h \right|^{-\sigma'}$$

bringen. Hier erweist sich der zweite Faktor im Reihenglied der Summe über h gemäß

$$\left| \frac{M\tau_0 - \bar{z}_0}{N} + h \right|^{-\sigma'} \leq \left(\frac{b_0}{N} \right)^{-\sigma'}$$

als beschränkt. Der erste Faktor ist für alle h höchstens gleich $\left(\frac{b}{N} \right)^{-2}$. Nach (24)

wird $M = \pm I$, wenn $m_1 = 0$; dann ist $\Re \frac{M\tau - \bar{z}}{N} = \Re \frac{\tau - \bar{z}}{N}$ beschränkt.

Im Falle $m_1 \neq 0$ dagegen hat man

$$\Re \frac{M\tau - \bar{z}}{N} = \Re \frac{M\tau^0 - \bar{z}}{N} + \Re \frac{M\tau - M\tau^0}{N},$$

wo sich $\left| \Re \frac{M\tau^0 - \bar{z}}{N} \right|$ nach (24) und $\left| \Re \frac{M\tau - M\tau^0}{N} \right|$ zufolge der Abschätzung

$$(27) \quad \left| \Re \frac{M\tau - M\tau^0}{N} \right| \leq \left| \frac{M\tau - M\tau^0}{N} \right| = \frac{|\tau - \tau^0|}{N|m_1\tau + m_2| |m_1\tau^0 + m_2|} \leq \frac{|\tau - \tau^0|}{Nm_1^2yy^0}$$

nach (G I), Satz 2 als beschränkt erweisen. Hieraus entnimmt man leicht die Beschränktheit der inneren Summe in (26). Die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe $\mathbf{P}$ folgt nun aus (G V), Hilfssatz 3 und den Konvergenzsätzen in (G V), § 2.

Von hier ab sei bis zum Schluß des § 4 durchweg $\Gamma = \Gamma(N)$, $\Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe N -ter Stufe der Modulgruppe.

Es seien $w, w_0, u = u_1 + iu_2$ (u_1, u_2 reell) komplexe Variable mit

$$\Im w > 0, \quad \Im w_0 > 0, \quad \Im w + u_2 > 0, \quad \Im w_0 + u_2 > 0, \quad -\Im w_0 + u_2 < 0,$$

$g_0(s, w, w_0, u)$ die Funktion

$$g_0(s, w, w_0, u) = N^{-2-s} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (w + u + h)^{-2} (w_0 + u + h)^{-\frac{s}{2}} (\bar{w}_0 + u + h)^{-\frac{s}{2}},$$

und dabei

$$0 < \arg(w + u + h) < \pi, \quad 0 < \arg(w_0 + u + h) < \pi, \\ -\pi < \arg(\bar{w}_0 + u + h) < 0.$$

Für reelles u wird also

$$g_0(s, w, w_0, u) = N^{-2-s} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (w + u + h)^{-2} |w_0 + u + h|^{-s},$$

so daß insbesondere

$$(28) \quad f_0(s, w, w_0) = g_0(s, w, w_0, 0).$$

Die Reihe g_0 konvergiert gleichmäßig absolut, wenn s, w, w_0, u beschränkt sind, und wenn bei positivem α_0 :

$$\Im w + u_2 \geq \alpha_0, \quad \Im w_0 + u_2 \geq \alpha_0, \quad -\Im w_0 + u_2 \leq -\alpha_0, \quad \sigma \geq -1 + \alpha_0.$$

Die Fourierreentwicklung von $g_0(s, w, w_0, u)$ liefert nach (28) die Darstellung

$$\begin{aligned} f_0(s, w, w_0) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{0,n}(s, w, w_0), \\ A_{0,n}(s, w, w_0) &= N^{-2-s} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+u)^{-2} |w_0+u|^{-s} e^{-2\pi i n u} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Nw+u)^{-2} |Nw_0+u|^{-s} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}} \frac{du}{N}. \end{aligned}$$

Indem wir hier $Nw = v$, $Nw_0 = v_0$ und

$$f_0(s, w, w_0) = f(s, v, v_0), \quad A_{0,n}(s, w, w_0) = A_n(s, v, v_0)$$

schreiben, erhalten wir die zunächst gesuchte Umformung

$$(29) \quad P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{M \in \mathfrak{E}_0} (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s} f(s', M\tau - \bar{z}, M\tau_0 - \bar{z}_0),$$

$$(30) \quad f(s', v, v_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s', v, v_0) \quad (v = M\tau - \bar{z}, v_0 = M\tau_0 - \bar{z}_0),$$

$$(31) \quad A_n(s', v, v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (v+u)^{-2} |v_0+u|^{-s'} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}} \frac{du}{N},$$

und mit der letzten Gleichung den Anschluß an die Theorie in (J III), § 3 [vgl. dort (40a)].

2. Aufspaltung.

Wir setzen voraus, daß mit festen positiven α_0 und C :

$$(32) \quad \begin{aligned} &\tau \subset \mathfrak{f}, \quad \tau_0 \subset \mathfrak{f}, \quad z \subset \mathfrak{f}, \quad z_0 \subset \mathfrak{f}, \quad \tau^0 \subset \mathfrak{f}, \\ &|s| \leq C, \quad |s'| \leq C, \quad \sigma \geq \alpha_0, \quad \sigma' \geq -1 + \alpha_0. \end{aligned}$$

Dann sind, wie wir sogleich zeigen, die Größen $v = M \tau - \bar{z}$, $v_0 = M \tau_0 - \bar{z}_0$ für $M \subset \mathfrak{S}_0$ beschränkt. Nach (24) ist zunächst $M \tau^0$ ($M \subset \mathfrak{S}_0$) beschränkt, da

$$\Im M \tau^0 = \frac{y^0}{|m_1 \tau^0 + m_2|^2} \leq \frac{y^0}{m_1^2 y^{0^2}} = \frac{1}{m_1^2 y^0} \quad (m_1 \neq 0).$$

Der Rest folgt hieraus, aus (27), (32) und der Zerlegung

$$v = M \tau^0 + (M \tau - M \tau^0) - \bar{z}, \quad v_0 = M \tau_0 + (M \tau_0 - M \tau^0) - \bar{z}_0.$$

Danach treffen die Voraussetzungen (J III), (41) über $A_n(s, v, v_0)$ zu, und man erhält mit konstantem $C_1 = C_1(\mathfrak{k}, C, \alpha_0)$ und festem $\alpha_1 > 0$

$$(33) \quad |A_n(s', v, v_0)| \leq C_1 e^{-2\pi |n| \frac{\alpha_1}{N}} \quad [(J III), (42)],$$

$$(34) \quad P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0),$$

$$\Theta_n = \Theta_n(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{M \subset \mathfrak{S}_0} \frac{A_n(s', M \tau - \bar{z}, M \tau_0 - \bar{z}_0)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s}.$$

Wir nehmen für $m_1 \neq 0$ eine Zerlegung des Integrals $A_n(s', v, v_0)$ vor, indem wir setzen

$$M \tau = \frac{m_0}{m_1} + M^* \tau, \quad M^* \tau = \frac{-1}{m_1(m_1 \tau + m_2)} \quad (m_1 \neq 0),$$

$$(35) \quad Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) \\ = A_n(s', M \tau - \bar{z}, M \tau_0 - \bar{z}_0) - A_n\left(s', \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}, \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}_0\right).$$

Dann ergibt sich nach (31)

$$(36) \quad Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) \\ = e^{2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}} (A_n(s', M^* \tau - \bar{z}, M^* \tau_0 - \bar{z}_0) - A_n(s', -\bar{z}, -\bar{z}_0)).$$

Die Aufspaltung der Reihe Θ geschieht nun folgendermaßen: Wir bilden

$$(37) \quad K_{n,1} = K_{n,1}(s', \tau, \tau_0, z, z_0) = 2 A_n\left(s', \tau - \bar{z}, \tau_0 - \bar{z}_0\right),$$

$$(38) \quad K_{n,2} = K_{n,2}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S} \\ m_1 \neq 0}} \frac{A_n\left(s', \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}, \frac{m_0}{m_1} - \bar{z}_0\right)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s}.$$

Dieser Ausdruck $K_{n,2}$ läßt sich in den Bezeichnungen (J III), (35), (67a) auf die Gestalt

$$(39) \quad K_{n,2} = A_n(s', -\bar{z}, -\bar{z}_0) \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}_0 \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}}}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s} \\ = A_n(s', -\bar{z}, -\bar{z}_0) H_2(s, \tau, \tau_0, n)$$

bringen, wo

$$H_2(s, \tau, \tau_0, n) = H_2(s; \tau, \tau_0, I, N, n).$$

Schließlich sei $\varepsilon_0 > 0$ fest vorgegeben. Nach (32) und für $M \subset \mathfrak{S}_0$, $m_1 \neq 0$ wird nach (G V), Hilfssatz 3

$$|M^* \tau| < \varepsilon_0, |M^* \tau_0| < \varepsilon_0 \quad \text{für } m_1^2 + m_2^2 > V = V(\varepsilon_0),$$

und wir setzen

$$(40) \quad K_{n,3} = K_{n,3,V} + K_{n,3}^V, \\ K_{n,3,V} = K_{n,3,V}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) \\ = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}_0, m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 \leq V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s},$$

$$(41) \quad K_{n,3}^V = K_{n,3}^V(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) \\ = \sum_{\substack{M \subset \mathfrak{S}_0, m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 > V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s},$$

so daß insgesamt

$$(42) \quad \Theta_n = K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3} = K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3,V} + K_{n,3}^V.$$

3. Abschätzung von $Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)$.

In der Integraldarstellung

$$(43) \quad Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) e^{-2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (M^* \tau - \bar{z} + u)^{-2} |M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u|^{-s'} - \right. \\ \left. - (-\bar{z} + u)^{-2} |-\bar{z}_0 + u|^{-s'} \right\} e^{-2\pi i n \frac{u}{N}} \frac{du}{N}$$

gestattet die geschweifte Klammer die folgende Umformung:

$$\begin{aligned}
 & \{ (M^* \tau - \bar{z} + u)^{-2} - (-\bar{z} + u)^{-2} \} |M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u|^{-s'} + \\
 & \quad + \{ |M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u|^{-s'} - |-\bar{z}_0 + u|^{-s'} \} (-\bar{z} + u)^{-2} \\
 &= \left(\frac{1}{M^* \tau - \bar{z} + u} - \frac{1}{-\bar{z} + u} \right) \left(\frac{1}{M^* \tau - \bar{z}_0 + u} + \frac{1}{-\bar{z}_0 + u} \right) |M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u|^{-s'} + \\
 & \quad + \left((M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} (M^* \bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - \right. \\
 & \quad \left. - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} (-z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \right) (-\bar{z} + u)^{-2} \\
 &= - (M^* \tau) (M^* \tau - \bar{z} + u)^{-2} (-\bar{z} + u)^{-1} (M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \times \\
 & \quad \times (M^* \bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} + \\
 & \quad - (M^* \tau) (M^* \tau - \bar{z} + u)^{-1} (-\bar{z} + u)^{-2} (M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \times \\
 & \quad \times (M^* \bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} + \\
 & \quad + \left\{ (M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \right\} (M^* \bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} (-\bar{z} + u)^{-2} + \\
 & \quad + \left\{ (M^* \bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \right\} (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} (-\bar{z} + u)^{-2}.
 \end{aligned}$$

Dadurch, daß nacheinander diese vier Ausdrücke an Stelle der geschweiften Klammer in das Integral (43) eingesetzt werden, entstehen vier neue Integrale, die wir der Reihe nach J_1, J_2, J_3, J_4 nennen: Es gilt

$$(44) \quad e^{-2\pi i \frac{m_0 n}{m_1 N}} Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Wir schreiben nun zur Abkürzung vorübergehend λ für $M^* \tau$, λ_0 für $M^* \tau_0$. In den genannten Integralen treten Potenzen der in u linearen Funktionen

$$u - u_0 \quad \text{mit} \quad u_0 = \bar{z}, \bar{z}_0, \bar{z} - \lambda, \bar{z}_0 - \lambda_0, z_0 - \bar{\lambda}_0$$

auf. Eine solche Potenz mit dem komplexen Exponenten ζ wird stets durch

$$\begin{aligned}
 (u - u_0)^\zeta &= e^{\zeta \log(u - u_0)}, \\
 -\frac{\pi}{2} &\leq \arg(u - u_0) \leq \frac{3\pi}{2} \quad \text{oder} \quad -\frac{3\pi}{2} \leq \arg(u - u_0) \leq \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

erklärt, je nachdem, ob $\Im u_0 < 0$ oder $\Im u_0 > 0$ ist, und dabei wird die u -Ebene von $u = u_0$ aus senkrecht nach unten oder oben aufgeschnitten. Zur Untersuchung der geschweiften Klammern in J_3 denke man sich außer diesen von $u = \bar{z}_0$ und $u = \bar{z}_0 - \lambda_0$ senkrecht nach unten ins Unendliche führenden Schnitten noch den Schnitt längs der Strecke von $u = \bar{z}_0$ nach $u = \bar{z}_0 - \lambda_0$ gezogen. Die entsprechende, zu dieser spiegelbildliche Konstruktion werde zur Untersuchung von J_4 in der oberen u -Halbebene ausgeführt. In dem Teil $\mathfrak{T}$ der aufgeschnittenen u -Ebene, welcher die reelle Achse enthält, gilt mit $\frac{s'}{2} = \varrho$, $|\varrho| \leq \mu = \frac{C}{2}$:

$$\begin{aligned} (M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} &= (\lambda_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\varrho} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\varrho} \\ &= (-\bar{z}_0 + u)^{-\varrho} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_0}{u - \bar{z}_0} \right)^{-\varrho} - 1 \right\} = (-\bar{z}_0 + u)^{-\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\varrho}{m} \frac{\lambda_0^m}{(u - \bar{z}_0)^m}. \end{aligned}$$

Auf dem in (J III) bei (41) angegebenen Integrationswege $\mathfrak{L}$ und auf der reellen Achse kann $\left| \frac{\lambda_0}{u - \bar{z}_0} \right| \leq \frac{1}{2}$ durch Wahl von ε_0 erreicht werden, wenn

$$m_1^2 + m_2^2 > V(\varepsilon_0).$$

Da außerdem

$$\begin{aligned} \left| \binom{-\varrho}{m} \right| &\leq \left| \binom{-\mu}{m} \right| = (-1)^m \binom{-\mu}{m}, \\ \left| \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\varrho}{m} \left(\frac{\lambda_0}{u - \bar{z}_0} \right)^{m-1} \right| &\leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\mu}{m} \frac{(-1)^m}{2^m} \leq 2^{a+1} \leq 2^{\frac{C}{2}+1}, \end{aligned}$$

so findet man

$$\left| (M^* \tau_0 - \bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \right| \leq 2^{\frac{1}{2}C+1} |M^* \tau_0| (-\bar{z}_0 + u)^{-\frac{s'}{2}-1}$$

und ebenso

$$\left| (M^* \bar{\tau}_0 - z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} - (-z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}} \right| \leq 2^{\frac{1}{2}C+1} |M^* \bar{\tau}_0| (-z_0 + u)^{-\frac{s'}{2}-1}.$$

Folglich liegen $|J_1|$ und $|J_2|$ bei festem $\alpha_1 > 0$ unterhalb einer Schranke

$$\text{Const } |M^* \tau| e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}},$$

$|J_3|$ und $|J_4|$ unterhalb einer Schranke

$$\text{Const } |M^* \tau_0| e^{-2\pi|n|\frac{\alpha_1}{N}}.$$

Insgesamt gilt für hinreichend großes $V(\varepsilon_0)$ und für $m_1^2 + m_2^2 > V(\varepsilon_0)$:

$$(45) \quad |Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)| \leq C_2(\mathfrak{k}, C, \alpha_0) (|M^* \tau| + |M^* \tau_0|) e^{-2\pi|n| \frac{\alpha_1}{N}}.$$

4. Analytische Fortsetzung von $P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$.

Aus (34), (37), (38), (39), (40), (41), (42) ergibt sich die Darstellung

$$P = P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = F_1 + F_2 + F_{3,V} + F_3^V,$$

$$F_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,1} = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s', \tau - \bar{z}, \tau_0 - \bar{z}_0),$$

$$F_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(s', -\bar{z}, -\bar{z}_0) H_2(s, \tau, \tau_0, n),$$

$$(46) \quad F_{3,V} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,3,V} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S}_0, m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 \leq V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s},$$

$$F_3^V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_{n,3}^V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S}_0, m_1 \neq 0 \\ m_1^2 + m_2^2 > V}} \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s},$$

deren Gültigkeit allerdings auf der Voraussetzung beruht, daß die vier unendlichen Summen über n konvergieren. Dies wird im folgenden bewiesen werden.

Wir untersuchen zunächst F_1 und $F_{3,V}$. Wenn die Bedingungen (32) erfüllt sind, so gilt (33), und daraus folgt die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe F_1 . Entsprechendes ergibt sich für $F_{3,V}$. Denn wenn man in der inneren Summe zunächst M festhält, so konvergiert die entstehende Summe unter den Bedingungen (32) gleichmäßig absolut, wie man auf Grund von (33) und (35) erkennt. Beide Aussagen hängen von der unteren Schranke von σ nicht ab.

Um F_3^V abzuschätzen, wenden wir auf das allgemeine Glied der inneren Summe den Hilfssatz 3 aus (G V) an. Dieser führt in Verbindung mit (45) und unter den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, zu der Ungleichung

$$\left| \frac{Q_n(s', M^*, \tau, \tau_0, z, z_0)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s} \right| \leq C_3(\mathfrak{k}, C, \alpha_0) \frac{e^{-2\pi|n| \frac{\alpha_1}{N}}}{|m_1 i + m_2|^{3+\sigma}} \quad (\alpha_1 > 0 \text{ und fest}).$$

Aus ihr geht hervor, daß die Reihe F_3^V gleichmäßig absolut konvergiert, sobald den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, und der Bedingung $\sigma \geq -1 + \alpha_0$ Genüge geschieht.

Bei der Untersuchung von F_2 hat man zu beachten, daß hier im Gegensatz zu (J III), § 3 auch negative Werte von n auftreten. Es ergibt sich nach dem Vorgehen von (J III), § 3 für alle n in den Bezeichnungen von (J III), (55), (55a), (57):

$$H_2(s, \tau, \tau_0, n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D(s, m, I, n) A_m(s, \tau, \tau_0),$$

$$D(s, m, I, n) = \sum_{\substack{m_1 \equiv 0 \pmod{N} \\ m_1 \neq 0}} |m_1|^{-2-s} W_{m_1}(m, I, n).$$

Die Funktion $H_2(s, \tau, \tau_0, 0)$ ist nach einer Bemerkung bei (J III) (74) unter den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, und unter der Bedingung $\sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0$ beschränkt. Für $n \neq 0$ ersieht man aus (J III), (62), d. h. aus

$$|W_{m_1}(m, I, n)| \leq C_4(\varepsilon) |m_1|^{\frac{2}{3}+\varepsilon} |n|^{\frac{1}{3}} \quad (\varepsilon > 0, n \neq 0),$$

daß

$$|D(s, m, I, n)| \leq C_5(\alpha_0) |n|^{\frac{1}{3}} \quad (\sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0, \alpha_0 > 0, n \neq 0),$$

$$|H_2(s, \tau, \tau_0, n)| \leq C_6(\mathfrak{f}, C, \alpha_0) |n|^{\frac{1}{3}} \quad (\sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0, \alpha_0 > 0, n \neq 0).$$

Diese Abschätzung hat zur unmittelbaren Folge, daß die Reihe F_2 unter den Bedingungen (32), soweit sie sich nicht auf σ beziehen, und unter der Bedingung $\sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Damit haben wir die Funktion $\mathbf{P}(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$ in das Gebiet $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\sigma' > -1$ analytisch fortgesetzt.

5. Bestimmung der Funktion $\mathbf{P}$ für $s' = 0$ und für $s = s' = 0$.

Endergebnis über die Funktion $\mathbf{P}$.

Zur Bestimmung des Nullwertes $\mathbf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ für $\sigma > 0$ dient die Formel

$$(47) \quad A_n(0, \tau, \tau_0) = 0 \quad (n \leq 0), \quad A_n(0, \tau, \tau_0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} n e^{2\pi i n \frac{\tau}{N}} \quad (n > 0).$$

Wir setzen

$$F_1 = F_1(s, s'), \quad F_2 = F_2(s, s'), \quad F_{3, \mathfrak{r}} = F_{3, \mathfrak{r}}(s, s'), \quad F_3^V = F_3^V(s, s')$$

und erhalten

$$Q_n(0, M^*, \tau, \tau_0, z, z_0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} n e^{-2\pi i n \frac{\bar{z}}{N}} \left(e^{2\pi i n \frac{M\tau}{N}} - e^{2\pi i n \frac{m_0}{m_1 N}} \right) (n > 0),$$

$$F_1(s, 0) = -\frac{8\pi^2}{N^2} \sum_{v=1}^{\infty} v e^{2\pi i v \frac{\tau - \bar{z}}{N}},$$

$$F_2(s, 0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{v=1}^{\infty} v e^{-2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}} \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S}_0 \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i v \frac{m_0}{m_1 N}}}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s},$$

$$F_{3,v}(s, 0) + F_3^V(s, 0) = -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{v=1}^{\infty} v e^{-2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}} \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S}_0 \\ m_1 \neq 0}} \frac{e^{2\pi i v \frac{M\tau}{N}} - e^{2\pi i v \frac{m_0}{m_1 N}}}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s},$$

$$\mathbf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0) = G_{-2}(s; \tau, \tau_0, I, N | F_0),$$

(48)

$$F_0(w) \equiv \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v w^v = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{N^2} v e^{-2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}} w^v,$$

da

$$\begin{aligned} G_{-2}(s; \tau, \tau_0, I, N | F_0) &= \sum_{M \in \mathfrak{S}_0} \frac{F_0\left(e^{2\pi i \frac{M\tau}{N}}\right)}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s} \\ &= -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{v=1}^{\infty} v e^{-2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}} \sum_{M \in \mathfrak{S}_0} \frac{e^{2\pi i v \frac{M\tau}{N}}}{(m_1 \tau + m_2)^2 |m_1 \tau_0 + m_2|^s} \quad (\sigma > 0). \end{aligned}$$

Der Nullwert $\mathbf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt also von z_0 nicht ab. In den Bezeichnungen von (J III), § 3, 4 gilt ferner, wenn $\varphi(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ und

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n \frac{\tau}{N}}$$

ihre Fourierreentwicklung angibt, nach (J III), (112) ($\tau_0 = \tau$):

$$(49) \quad (\varphi(\tau), \mathbf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0); \Gamma(N)) = W_{2+\frac{s}{2}}(\varphi(\tau), \mathbf{P}(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0); \mathfrak{K})$$

$$= -2\pi \left(\frac{N}{4\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \sum_{v=1}^{\infty} v^{-\frac{s}{2}} b_v e^{2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}}.$$

Der Nullwert $P(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt mithin weder von τ_0 noch von z_0 ab, stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar und genügt der Beziehung

$$(50) \quad (\varphi(\tau), P(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0); \Gamma(N)) = -2\pi\varphi(z).$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Funktion $P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$ auch da, wo sie nicht durch ihre ursprüngliche Reihe dargestellt wird, von der Wahl von V nicht abhängt.

Zusammenfassend formulieren wir die Ergebnisse dieses Paragraphen in den folgenden Aussagen:

Satz 1. Sind τ, τ_0, z, z_0 vier komplexe Zahlen mit positiven Imaginärteilen, $s = \sigma + it$, $s' = \sigma' + it'$, (σ, σ', t, t' reell) zwei komplexe Zahlen mit positiven Realteilen, so konvergiert die Reihe

$$P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0) = \sum_{M \in \Gamma} (m_1 \tau + m_2)^{-2} |m_1 \tau_0 + m_2|^{-s} (M\tau - \bar{z})^{-2} |M\tau_0 - \bar{z}_0|^{-s'}.$$

Dabei bezeichnet $\Gamma = \Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe N -ter Stufe der Modulgruppe und $\{m_1, m_2\}$ die zweite Zeile der Matrix M . Man verstehe unter $\mathfrak{f}$ eine beliebige, aber feste H -Kreisscheibe, unter α_0 eine beliebig klein, unter C eine beliebig groß vorgeschriebene positive Zahl. Dann gestattet die Funktion $P(s, s', \tau, \tau_0, z, z_0)$ die unter den Bedingungen

$$\tau \subset \mathfrak{f}, \quad \tau_0 \subset \mathfrak{f}, \quad z \subset \mathfrak{f}, \quad z_0 \subset \mathfrak{f}, \\ \sigma \geq -\frac{1}{3} + \alpha_0, \quad \sigma' \geq -1 + \alpha_0, \quad |s| \leq C, \quad |s'| \leq C$$

gleichmäßig absolut konvergente Reihendarstellung (46). Sie ist mithin, wenn τ, τ_0, z, z_0 sämtlich positiven Imaginärteil haben und $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\sigma' > -1$ zutrifft, bei festen τ_0, z_0 eine reguläre analytische Funktion der vier Variablen $s, s', \tau, -\bar{z}$. Ferner ist sie unter diesen Bedingungen eine stetige Funktion aller ihrer sechs Argumente $s, s', \tau, \tau_0, z, z_0$.

Satz 2. Der Nullwert $P(s, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ hängt von z_0 nicht ab; er stimmt für beliebige τ, τ_0, z in der oberen Halbebene und für $\sigma > -\frac{1}{3}$ mit der Funktion $G_{-2}(s; \tau, \tau_0, I, N | F_0)$ aus (J III), § 3 überein, wo

$$F_0(w) = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v w^v \quad \text{mit} \quad \beta_v = -\frac{4\pi^2}{N^2} v e^{-2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}} \quad (v \geq 1).$$

Darüber hinaus hängt der Nullwert $P(0, 0, \tau, \tau_0, z, z_0)$ weder von τ_0 noch von z_0 ab, stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar, stimmt als solche mit der Funktion $-\frac{4\pi^2}{N^2} \Omega(\tau, -\bar{z}, 0, I)$ aus (J III), § 4 überein und genügt daher der Metrisierungsformel (50).

§ 3.

1. Entwicklung von P in eine unendliche Reihe nach hyperbolischen Quersummen.

Es mögen für $\Gamma = \Gamma(N)$ die Symbole $\eta, \eta', H, H', H, \mu'$ die zu Anfang von § 1 angegebene Bedeutung haben. Wir setzen $u = Hz$, $u_0 = Hz_0$ und erhalten für $\sigma > 0$ nach dem Vorgehen des § 1 zunächst

$$P(s, s, \tau, \tau_0, z, z_0) = (-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^2 |-\eta'_1 \bar{u}_0 + \eta_1|^s \times \\ \times \sum_{B \in \Theta(H, \Gamma)} \frac{(B\tau) |B\tau_0|^{\frac{s}{2}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2) (\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau_0 + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau_0 + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}} f(s, B\tau, B\tau_0, u, u_0), \\ f(s, \tau, \tau_0, u, u_0) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\mu^{ih} \tau - \mu^{-ih} \bar{u})^2 |\mu^{ih} \tau_0 - \mu^{-ih} \bar{u}_0|^s},$$

sodann aber, wenn analog zu den Bezeichnungen des § 1

$$(51a) \quad \tau = R e^{i\vartheta}, \quad \tau_0 = R_0 e^{i\vartheta_0}, \quad u = \varrho e^{i\omega}, \quad u_0 = \varrho_0 e^{i\omega_0}, \\ R > 0, \quad R_0 > 0, \quad \varrho > 0, \quad \varrho_0 > 0, \\ 0 < \vartheta < \pi, \quad 0 < \vartheta_0 < \pi, \quad 0 < \omega < \pi, \quad 0 < \omega_0 < \pi, \\ \sqrt{\tau \bar{u}} = \sqrt{R \varrho} e^{i \frac{\vartheta + \omega}{2}}, \quad \sqrt{\tau_0 \bar{u}_0} = \sqrt{R_0 \varrho_0} e^{i \frac{\vartheta_0 + \omega_0}{2}}, \\ \zeta = \zeta(\tau, \bar{u}) = \sqrt{\frac{\tau}{u}} = \sqrt{\frac{R}{\varrho}} e^{i \frac{\vartheta + \omega}{2}} = \lambda e^{i\chi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{R}{\varrho}} > 0, \quad \chi = \frac{\vartheta + \omega}{2}, \\ \zeta_0 = \zeta(\tau_0, \bar{u}_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{u_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{\varrho_0}} e^{i \frac{\vartheta_0 + \omega_0}{2}} = \lambda_0 e^{i\chi_0}, \\ \lambda_0 = \sqrt{\frac{R_0}{\varrho_0}} > 0, \quad \chi_0 = \frac{\vartheta_0 + \omega_0}{2}, \\ (51b) \quad B\tau = R_B e^{i\vartheta_B}, \quad B\tau_0 = R_{0,B} e^{i\vartheta_{0,B}}, \quad R_B > 0, \quad R_{0,B} > 0, \\ 0 < \vartheta_B < \pi, \quad 0 < \vartheta_{0,B} < \pi, \\ \zeta_B = \zeta(B\tau, \bar{u}) = \lambda_B e^{i\chi_B}, \quad \lambda_B = \sqrt{\frac{R_B}{\varrho}} > 0, \quad \chi_B = \frac{\vartheta_B + \omega}{2}, \\ \zeta_{0,B} = \zeta(B\tau_0, \bar{u}_0) = \lambda_{0,B} e^{i\chi_{0,B}}, \quad \lambda_{0,B} = \sqrt{\frac{R_{0,B}}{\varrho_0}} > 0, \quad \chi_{0,B} = \frac{\vartheta_{0,B} + \omega_0}{2}$$

gesetzt wird, die Darstellung

$$(52) \quad P(s, s, \tau, \tau_0, z, z_0) = (\eta_1 \bar{z} + \eta_2)^{-1} (\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2)^{-1} |\eta_1 \bar{z}_0 + \eta_2|^{-\frac{s}{2}} |\eta'_1 \bar{z}_0 + \eta'_2|^{-\frac{s}{2}} \times \\ \times \sum_{\mathbf{B} \in \mathfrak{G}(\mathbf{H}, \Gamma)} \frac{g(s, \zeta_{\mathbf{B}}, \zeta_{0, \mathbf{B}})}{(\beta_1 \tau + \beta_2) (\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau_0 + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau_0 + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}},$$

$$(53) \quad g(s, \zeta_{\mathbf{B}}, \zeta_{0, \mathbf{B}}) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\mu^{h\zeta_{\mathbf{B}}} - \mu'^{-h} \zeta_{\mathbf{B}}^{-1})^{-2} |\mu^{h\zeta_{0, \mathbf{B}}} - \mu'^{-h} \zeta_{0, \mathbf{B}}^{-1}|^{-s}.$$

In der vorliegenden Arbeit soll lediglich der Fall $s = s'$, $\tau = \tau_0$, $z = z_0$ vollständig diskutiert werden. Zur Behandlung der allgemeineren Funktion $P(s, s, \tau, \tau_0, z, z_0)$ von den fünf Variablen $s = s'$, τ, τ_0, z, z_0 liegt in (51), (52), (53) der Ansatz vor. Wie weit und mit welchen Ergebnissen die im folgenden entwickelte Theorie auf die genannte allgemeinere Funktion P ($s = s'$) angewendet werden kann, wurde noch nicht untersucht.

Wir schreiben

$$F(s, \tau, z) = P(s, s, \tau, \tau, z, z)$$

und finden nach (51), (52), (53) für $\sigma > 0$

$$(54) \quad F(s, \tau, z) = (\eta_1 \bar{z} + \eta_2)^{-1} (\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2)^{-1} |\eta_1 \bar{z} + \eta_2|^{-\frac{s}{2}} |\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2|^{-\frac{s}{2}} \times \\ \times \sum_{\mathbf{B} \in \mathfrak{G}(\mathbf{H}, \Gamma)} \frac{g(s, \zeta_{\mathbf{B}})}{(\beta_1 \tau + \beta_2) (\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}}$$

$$(55) \quad g(s, \zeta) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\mu^{h\zeta} - \mu'^{-h} \zeta^{-1})^{-2} |\mu^{h\zeta} - \mu'^{-h} \zeta^{-1}|^{-s}.$$

Zur Umformung von $g(s, \zeta)$ bilden wir mit $w = w_1 + i w_2$ (w_1, w_2 reell) die Reihe

$$(56) \quad g(s, \zeta, w) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\mu^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1})^{-2-\frac{s}{2}} (\mu^{h+w} \bar{\zeta} - \mu'^{-h-w} \bar{\zeta}^{-1})^{-\frac{s}{2}},$$

deren Sinn nun durch die Bestimmung der Zweige der vieldeutigen Funktionen im allgemeinen Reihenglied erklärt wird. Man erhält

$$\Im(\mu^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1}) = (\mu'^{h+w_1} \lambda + \mu'^{-h-w_1} \lambda^{-1}) \sin(w_2 \log \mu' + \chi),$$

$$\Im(\mu^{h+w} \bar{\zeta} - \mu'^{-h-w} \bar{\zeta}^{-1}) = (\mu'^{h+w_1} \lambda + \mu'^{-h-w_1} \lambda^{-1}) \sin(w_2 \log \mu' - \chi).$$

Hier sei $0 < w_2 \log \mu' + \chi < \pi$, $-\pi < w_2 \log \mu' - \chi < 0$, d. h.

$$(57) \quad |w_2| \log \mu' < \min(\chi, \pi - \chi).$$

Dann wird der erste Imaginärteil positiv, der zweite negativ, und die genannten vieldeutigen Funktionen können in der üblichen Weise durch

$$0 < \arg(\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1}) < \pi, \quad -\pi < \arg(\mu'^{h+w} \bar{\zeta} - \mu'^{-h-w} \bar{\zeta}^{-1}) < 0$$

festgelegt werden. Das allgemeine Reihenglied in (56) läßt sich für $|s| \leq C$, $\sigma \geq 0$ dem Betrage nach durch

$$\mu'^{\sigma} (\mu'^{h+w_1} \lambda + \mu'^{-h-w_1} \lambda^{-1})^{-2-\sigma} \sin^{-2-\frac{\sigma}{2}} (w_2 \log \mu' + \chi) \sin^{-\frac{\sigma}{2}} (\chi - w_2 \log \mu')$$

abschätzen. Für $|s| \leq C$, $-2 < \sigma < 0$ tritt an die Stelle dieses Ausdrucks derjenige, welcher aus ihm entsteht, indem man dort den letzten Faktor

$$\sin^{-\frac{\sigma}{2}} (\chi - w_2 \log \mu')$$

durch 1 ersetzt. Denn man bestätigt, daß

$$|\mu'^{h+w} \bar{\zeta} - \mu'^{-h-w} \bar{\zeta}^{-1}|^2 \leq (\mu'^{h+w_1} \lambda + \mu'^{-h-w_1} \lambda^{-1})^2.$$

Aus den Abschätzungen folgt die in allen Parametern gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe (56), wenn bei hinreichend kleinem $\alpha_0 > 0$:

$$|w_1| \leq C, \quad |s| \leq C, \quad C^{-1} \leq \lambda \leq C, \quad |w_2| \log \mu' \leq \min(\chi, \pi - \chi) - \alpha_0, \\ \sigma \geq -2 + \alpha_0;$$

überdies gilt für reelles w , also für $w_2 = 0$:

$$g(s, \zeta, w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1})^{-2} |\mu'^{h+w} \zeta - \mu'^{-h-w} \zeta^{-1}|^{-s}.$$

Insgesamt ergibt sich die Darstellung

$$(58) \quad g(s, \zeta) = g(s, \zeta, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n(s, \zeta),$$

$$B_n(s, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w} dw}{(\mu'^w \zeta - \mu'^{-w} \zeta^{-1})^{2+\frac{s}{2}} (\mu'^w \bar{\zeta} - \mu'^{-w} \bar{\zeta}^{-1})^{\frac{s}{2}}},$$

$$(59) \quad B_n(s, \zeta) = e^{2\pi i n \frac{\log \zeta}{\log \mu'}} K_n(s, \psi) = \tau^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \bar{u}^{-\frac{\pi i n}{\log \mu'}} K_n(s, \psi),$$

$$(60) \quad K_n(s, \psi) = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w} dw}{(\mu'^w - \mu'^{-w})^{2+\frac{s}{2}} (\mu'^w e^{-i\psi} - \mu'^{-w} e^{i\psi})^{\frac{s}{2}}}$$

mit $\psi = 2\chi = \vartheta + \omega$, $0 < \psi < 2\pi$; für α kann ein beliebiger Wert von der Gestalt

$$\alpha = w_2 + \frac{\chi}{\log \mu'} = \frac{w_2 \log \mu' + \chi}{\log \mu'}$$

gewählt werden, wo w_2 der Ungleichung (57) genügt. Dies besagt für α :

$$(61) \quad \begin{aligned} 0 < \alpha \log \mu' < \pi, \quad -\pi + \psi < \alpha \log \mu' < \psi, \\ \text{d. h.} \quad \max(0, \psi - \pi) < \alpha \log \mu' < \min(\pi, \psi). \end{aligned}$$

In der Darstellung (54) tritt $\zeta_{\mathbf{B}}$ an die Stelle von ζ , also $\vartheta_{\mathbf{B}}$ an die Stelle von ϑ , in (60) mithin $\psi_{\mathbf{B}} = \vartheta_{\mathbf{B}} + \omega$ an die Stelle von ψ . Dabei hat das nach (61) für α zugelassene Intervall eine von $\mathbf{B}$ unabhängige Mindestlänge. Denn die Gesamtlänge ist nach (61)

$$\frac{1}{\log \mu'} \min(\vartheta_{\mathbf{B}} + \omega, 2\pi - (\vartheta_{\mathbf{B}} + \omega)) > \frac{1}{\log \mu'} \min(\omega, \pi - \omega) \quad (\omega = \arg u).$$

Wir bilden unter ständigem Festhalten an der Beziehung $u = \mathbf{H}z$ die Funktion

$$(62) \quad \begin{aligned} \Lambda(s, \tau, u) &= Z(s, \tau, z) \\ &= (\eta_1 \bar{z} + \eta_2) (\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2) |\eta_1 \bar{z} + \eta_2|^{\frac{s}{2}} |\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2|^{\frac{s}{2}} F(s, \tau, z); \end{aligned}$$

sie gestattet nach (54), (58), (59) für $\sigma > 0$ die Darstellung

$$(63) \quad \begin{aligned} \Lambda(s, \tau, u) &= Z(s, \tau, z) \\ &= \sum_{\mathbf{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{H}, \Gamma)} \frac{1}{(\beta_1 \tau + \beta_2) (\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mathbf{H}\bar{z})^n \frac{-\pi i n}{\log \mu'} (\mathbf{B}\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} K_n(s, \vartheta_{\mathbf{B}} + \omega). \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Konvergenz dieser Doppelsumme für $\sigma > 0$. Der Nenner im Integranden von (60) liegt nicht unterhalb des Ausdrucks

$$e^{-\pi C} (\mu'^{w_1} + \mu'^{-w_1})^{2+\sigma} \sin^{2+\frac{\sigma}{2}}(\alpha \log \mu') \sin^{\frac{\sigma}{2}}(\psi - \alpha \log \mu');$$

hier gilt

$$0 < \alpha \log \mu' < \pi, \quad 0 < \psi - \alpha \log \mu' < \pi,$$

und ψ hat von 0 und von 2π einen positiven Mindestabstand. Wir geben ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ vor und unterscheiden zur Abschätzung von $K_n(s, \psi)$ vier Fälle:

a) $0 < \psi \leq \pi$, daher $0 < \alpha \log \mu' < \psi$. Wir setzen $\alpha \log \mu' = \varepsilon$ für $n > 0$, $\alpha \log \mu' = \psi - \varepsilon$ für $n < 0$ und erhalten

$$(63a) \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{\frac{2\pi n}{\log \mu'}}\right) (n > 0), \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{\frac{2\pi n}{\log \mu'} \frac{\psi - \varepsilon}{\psi}}\right) (n < 0).$$

b) $\pi \leq \psi < 2\pi$, daher $\psi - \pi < \alpha \log \mu' < \pi$. Wir setzen $\alpha \log \mu' = \psi - \pi + \varepsilon$ für $n > 0$, $\alpha \log \mu' = \pi - \varepsilon$ für $n < 0$ und erhalten

$$(63b) \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{\frac{2\pi n}{\log \mu'} \frac{\psi - \pi + \varepsilon}{\log \mu'}}\right) (n > 0), \quad K_n(s, \psi) = O\left(e^{\frac{2\pi n}{\log \mu'} \frac{\pi - \varepsilon}{\log \mu'}}\right) (n < 0).$$

Da überdies $\log \zeta = \log \lambda + i \frac{\psi}{2}$ und

$$\left| e^{\frac{2\pi i n}{\log \mu'} \frac{\log \zeta}{\log \mu'}} \right| = e^{-\pi n \frac{\psi}{\log \mu'}},$$

so entstehen die Abschätzungen

$$B_n(s, \zeta) = O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'} (2\varepsilon - \psi)}\right) (n > 0), \quad (0 < \psi \leq \pi),$$

$$B_n(s, \zeta) = O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'} (\psi - 2\varepsilon)}\right) (n < 0)$$

$$B_n(s, \zeta) = O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'} (\psi - 2\pi + 2\varepsilon)}\right) (n > 0), \quad (\pi \leq \psi < 2\pi).$$

$$B_n(s, \zeta) = O\left(e^{\frac{\pi n}{\log \mu'} (2\pi - \psi - 2\varepsilon)}\right) (n < 0)$$

Sie gelten bei festem $\varepsilon > 0$ gleichmäßig für $|s| \leq C$, $\sigma \geq 0$, alle τ in der oberen Halbebene und $u \in \mathbb{H}$. Daraus folgt die gleichmäßige absolute Konvergenz der inneren Summe auf der rechten Seite von (63) und vermöge der Konvergenzsätze über hyperbolische Quersummen aus (GV), § 2 auch die der vollen Summe in (63); hierzu reicht insgesamt hin, daß

$$\tau \in \mathbb{H}, \quad z \in \mathbb{H}, \quad \sigma \geq \alpha_0 (\alpha_0 > 0).$$

2. Integraldarstellungen von gewissen, den hyperbolischen verwandten Quersummen.

Wir bilden nunmehr die Funktion

$$(64) \quad Y(s, \tau, u, n) = \frac{1}{2 \log \mu'} \int_{\xi=1}^{\mu'^2} \Lambda(s, \tau, \xi u) (\xi \bar{u})^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \frac{d\xi}{\xi} \quad (1 \leq \xi \leq \mu'^2).$$

Nach der letzten Aussage in Satz 1 und (62) stellt $\Lambda(s, \tau, u)$ eine stetige Funktion von s , τ und u dar, wenn $\sigma > -\frac{1}{3}$, $\tau \in \mathbb{H}$, $u \in \mathbb{H}$. Das gleiche gilt

mithin von $Y(s, \tau, u, n)$. Insbesondere aber ist $Y(s, \tau, u, n)$ für $\tau \in \mathfrak{H}$, $u \in \mathfrak{H}$ eine analytische Funktion von s im Gebiete $\sigma > -\frac{1}{2}$. Aus (63) folgt

$$(65) \quad Y(s, \tau, u, n) = \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}} K_n(s, \vartheta_B + \omega).$$

Es liegt nach Satz 2 nahe zu vermuten, daß der Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ dieser Funktion Y von u nicht abhängt und eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ in der Variablen τ darstellt. Diese Vermutung trifft, wie wir sogleich beweisen werden, zu; darüber hinaus werden wir das Skalarprodukt einer ganzen Spitzenform $\varphi(\tau)$ der Klasse $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ mit dem Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ bestimmen.

Man hat nach (48) (vgl. Satz 2)

$$(66) \quad F(0, \tau, z) = -\frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{v=1}^{\infty} v e^{-2\pi i v \frac{\bar{z}}{N}} G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, v)$$

ferner

$$(\eta_1 \bar{z} + \eta_2)(\eta'_1 \bar{z} + \eta'_2) = \bar{u}(-\eta'_1 \bar{u} + \eta_1)^{-2},$$

mithin nach (62), (63)

$$\begin{aligned} Y(0, \tau, u, n) &= -\frac{2\pi^2}{N^2 \log \mu'} \int_{\xi=1}^{\mu'^2} \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} (-\eta'_1 \xi \bar{u} + \eta_1)^{-2} e^{-2\pi i v \frac{H^{-1}(\xi \bar{u})}{N}} \right. \\ &\quad \times (\xi \bar{u})^v G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, v) (\xi \bar{u})^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \left. \right\} \frac{d\xi}{\xi}, \\ (67) \quad Y(0, \tau, u, n) &= -\frac{2\pi^2}{N^2 \log \mu'} \sum_{v=1}^{\infty} p_v(\bar{u}) v G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, v), \\ p_v(\bar{u}) &= \int_{\xi=1}^{\mu'^2} (-\eta'_1 \xi \bar{u} + \eta_1)^{-2} e^{-2\pi i v \frac{H^{-1}(\xi \bar{u})}{N}} (\xi \bar{u})^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \bar{u} d\xi \\ &= \int_{\frac{\bar{u}}{u}}^{\mu'^2 \frac{\bar{u}}{u}} (-\eta'_1 v + \eta_1)^{-2} e^{-2\pi i v \frac{H^{-1}v}{N}} v^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} dv, \\ p_v(\bar{u}) &= \int_{\frac{\bar{z}}{z}}^{\frac{H\bar{z}}{z}} e^{-2\pi i v \frac{w}{N}} (Hw)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} dw \quad (H = H^{-1} D_{\mu'} H). \end{aligned}$$

Die in (J III), Satz 8 angegebene Abschätzung $|G_{-2}(0; \tau, \tau_0, I, N, v)| \leq \text{Const } v$ ($\tau \in \mathfrak{f}$) ermöglicht die Vertauschung von Summe und Integral

und bewirkt die gleichmäßige absolute Konvergenz der Darstellung (67) für $\tau \in \mathfrak{F}, z \in \mathfrak{F}$. Damit ist zunächst $Y(0, \tau, u, n)$ als ganze Spitzenform $\Gamma(N), -2, 1\}$ erkannt.

Es sei $\varphi(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$, und es seien die Entwicklungen von $\varphi(\tau)$ nach den Ortsvariablen des parabolischen Fixpunktes ∞ und des hyperbolischen Fixpunktepaars η, η' durch

$$(68) \quad \varphi(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(I) e^{2\pi i m \frac{\tau}{N}} \\ = (\eta_1 \tau + \eta_2)^{-1} (\eta'_1 \tau + \eta'_2)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(H) (H\tau)^{\frac{\pi i m}{\log \mu'}}$$

gegeben. Nach der Grundformel (J III), (115) und (J III), Satz 13 ergibt sich

$$\begin{aligned} (\varphi(\tau), Y(0, \tau, u, n)) &= -\frac{2\pi^2}{N^2 \log \mu'} \sum_{v=1}^{\infty} \overline{p_v(u)} v^{\frac{N^2}{2\pi}} b_v v^{-1} \quad (b_v = b_v(I)) \\ &= -\frac{\pi}{\log \mu'} \sum_{v=1}^{\infty} b_v \overline{p_v(u)} \\ &= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_z^{Hz} \sum_{v=1}^{\infty} b_v e^{2\pi i v \frac{w}{N}} (Hw)^{-\frac{\pi i n}{\log \mu'}} dw \\ &= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_z^{Hz} \varphi(\tau) (H\tau)^{-\frac{\pi i n}{\log \mu'}} d\tau. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige absolute Konvergenz der unendlichen Reihe in der zweiten sowie die Vertauschbarkeit von Summe und Integral beim Übergang von der zweiten zur dritten dieser vier Gleichungen entnimmt man (J III), Satz 11. Nun wird mit $\tau' = H\tau$, $v = \log \tau'$:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= (\eta'_1 \tau + \eta'_2)^{-2} (H\tau)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(H) (H\tau)^{\frac{\pi i m}{\log \mu'}}, \\ (\varphi(\tau), Y(0, \tau, u, n)) &= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_{\tau'=u}^{u'^2 u} \tau'^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(H) \tau'^{\pi i \frac{m-n}{\log \mu'}} d\tau' \\ &= -\frac{\pi}{\log \mu'} \int_{\log u}^{\log u + 2\log \mu'} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m(H) e^{\pi i \frac{m-n}{\log \mu'} v} dv, \\ (69) \quad (\varphi(\tau), Y(0, \tau, u, n)) &= -2\pi b_n(H). \end{aligned}$$

Zur Deutung dieser Formel berücksichtigen wir, daß eine ganze Spitzenform $Y(\tau) \in \{\Gamma, -2, 1\}$ durch die Werte ihrer Skalarprodukte $(\varphi(\tau), Y(\tau))$

mit den sämtlichen ganzen Spitzenformen $q(\tau) \in \{\Gamma, -2, 1\}$ eindeutig bestimmt ist. Wir erkennen hieraus beim Vergleich von (69) mit der Grundformel (J IV), (27), daß die Funktion $Y(0, \tau, u, n)$, abgesehen von ihrer formalen Darstellung (65), auch hinsichtlich ihrer metrischen Eigenschaften das Verhalten einer hyperbolischen Quersumme zeigt — sofern man von einer solchen sprechen kann. Ferner erkennen wir, daß $Y(0, \tau, u, n)$ in der Tat von u nicht abhängt.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz 3. *Die durch (65) erklärte Funktion $Y(s, \tau, u, n)$ ($u = Hz$) ist für die τ und z in der oberen Halbebene und die s mit $\sigma > -\frac{1}{3}$ stetig in s, τ, z und regulär-analytisch in s . Ihr Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ hängt von z nicht ab und stellt als Funktion von τ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar. Es gibt eine positive, nur von n abhängige Konstante k_n von folgender Eigenschaft: Das metrische Verhalten des Nullwertes $\frac{1}{k_n} Y(0, \tau, u, n)$ steht in genauer Analogie zu dem der hyperbolischen Quersummen von der Dimension $-r < -2$.*

Die in Satz 3 angedeutete Metrisierungsformel hat die Gestalt (J IV) (27). In ihr tritt $\frac{1}{k_n} Y(0, \tau, u, n)$ an die Stelle von $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathbf{A}, \Gamma, n)$, $\mathbf{H}$ an die Stelle von $\mathbf{A}$, 2 an die Stelle von r , 1 an die Stelle aller v -Werte. Die Konstante $\epsilon_2(n, \mu')$ bestimmt sich aus (J IV) (26a) durch Einsetzen von $r = 2$. Danach und nach (102) erweist sich k_n als der von ψ unabhängige Nullwert $K_n(0, \psi)$.

Die in der Darstellung (65) bei dem einzelnen Reihenglied auftretenden Faktoren $K_n(s, \partial_{\mathbf{B}} + \omega)$ setzen nun, wie man durch eingehende Untersuchung erkennt, einer direkten Behandlung der Funktionen $Y(s, \tau, u, n)$ große Schwierigkeiten entgegen. Die Tatsache ferner, daß wir in dem Nullwert $\frac{1}{k_n} Y(0, \tau, u, n)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ gewonnen haben, deren metrisches Verhalten dem der hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, \mathbf{H}, \Gamma, n)$ für $r > 2$ genau entspricht, kann allein für sich nicht als erheblicher Fortschritt angesehen werden. Denn nach dem Beweise von (J III), Satz 22 läßt sich mit rein algebraischen Methoden eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ konstruieren, welche eben dieses durch (69) beschriebene metrische Verhalten der Funktion $Y(0, \tau, u, n)$ aufweist; der so entstehende Existenzbeweis für eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dieses Verhaltens beruht auf der Metrisierung der ABELSchen Differentiale erster Gattung als analytischer Grundlage. Bei dem Standpunkt, den wir in der vorliegenden Untersuchung einnehmen, und im Hinblick auf ihre Anwendungen können wir dem Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ nur vermöge seiner Beziehungen zu Quersummen von hyperbolischem Typus eine Bedeutung beimessen, vorausgesetzt, daß diese Quersummen sich einer weiteren Behandlung als zugänglich erweisen. Wir

gehen daher im folgenden darauf aus, zu zeigen, daß die Nullwerte derjenigen Funktionen von s , deren Reihendarstellung für $\sigma > 0$ aus (65) entstehen, indem man überall $K_n(s, \vartheta_B + \omega)$ durch k_n ersetzt, gleichfalls das durch (69) beschriebene metrische Verhalten aufweisen.

Bevor dies im folgenden Paragraphen durchgeführt wird, soll in diesem § 3 zum Schluß noch ein zweiter Beweis dafür dargestellt werden, daß der Nullwert $Y(0, \tau, u, n)$ von u nicht abhängt.

Die durch (J III), (128), (116) erklärte Funktion $\Omega(\tau, z, 0, I)$ hängt mit $F(0, \tau, z)$ nach (66) vermöge der Beziehung

$$F(0, \tau, z) = -\frac{4\pi^2}{N^2} \Omega(\tau, -\bar{z}, 0, I)$$

zusammen. (J III), (132) besagt im vorliegenden Falle:

$$\overline{\Omega(\tau, -\bar{z}, 0, I)} = \Omega(z, -\bar{\tau}, 0, I),$$

also

(70)

$$\overline{F(0, \tau, z)} = F(0, z, \tau);$$

dies gibt

$$A(0, \tau, u) = \overline{(\eta_1 z + \eta_2)(\eta'_1 z + \eta'_2) F(0, z, \tau)}.$$

Als automorphe Form $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ in der Variablen z gestattet $F(0, z, \tau)$ eine Entwicklung von der Gestalt

$$(\eta_1 z + \eta_2)(\eta'_1 z + \eta'_2) F(0, z, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m (Hz)^{\frac{\pi i m}{\log \mu'}},$$

in der $\gamma_m = \gamma_m(\tau)$ von τ , nicht aber von z abhängt. Daraus folgt

$$Y(0, \tau, u, n) = \frac{1}{2 \log \mu'} \int_1^{u^2} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{\gamma_m} \bar{u}^{-\frac{\pi i m}{\log \mu'}} \bar{\xi}^{-\frac{\pi i(n-m)}{\log u'}} \right) \bar{u}^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}} \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}},$$

(71)

$$Y(0, \tau, u, n) = \overline{\gamma_n(\tau)}.$$

§ 4.

1. Erste Approximation von $Y(s, \tau, u, n)$.

Wir setzen für komplexes w und reelles ψ :

$$p(w, \psi) = \mu'^w e^{-i\psi} - \mu'^{-w} e^{i\psi},$$

so daß

$$K_n(s, \psi) = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{2 + \frac{s}{2}} \cdot \frac{\frac{s}{2}}{p(w, 0) p(w, \psi)} dw,$$

(72)

$$\max(0, \psi - \pi) < \alpha \log \mu' < \min(\psi, \pi).$$

In der Reihendarstellung (65) für $Y(s, \tau, u, n)$ tritt $K_n(s, \psi)$ mit $\psi = \vartheta_B + \omega$ auf. Wenn $\tau \subset \mathfrak{f}$ und B das System $\mathfrak{S}(H, \Gamma)$ durchläuft, so strebt $\left| \arg B\tau - \frac{\pi}{2} \right|$ gleichmäßig gegen $\frac{\pi}{2}$, d. h. die sämtlichen $B \subset \mathfrak{S}(H, \Gamma)$ lassen sich auf zwei Folgen $B_k^{(1)}, B_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) disjunktiv und vollständig so verteilen, daß gleichmäßig für $\tau \subset \mathfrak{f}$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \arg B_k^{(1)} \tau = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \arg B_k^{(2)} \tau = \pi.$$

[Zum Beweise vgl. (G V), § 2.]

Wir untersuchen das Verhalten von $K_n(s, \omega + \vartheta)$ bei festem ω , wenn ϑ gegen 0 oder π strebt; dabei wird $0 < \alpha_0 \leq \omega \leq \pi - \alpha_0 < \pi$ für festes, hinreichend kleines $\alpha_0 > 0$ vorausgesetzt. Für festes, hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$ mit $0 < \varepsilon_0 < \frac{\alpha_0}{2}$ sei zunächst $0 < \vartheta < \varepsilon_0$ oder $\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi$. Dann gilt nach (72)

$$(73) \quad \begin{aligned} 0 < \alpha \log \mu' < \omega + \vartheta \quad (0 < \vartheta < \varepsilon_0), \\ \omega + \vartheta - \pi < \alpha \log \mu' < \pi \quad (\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi). \end{aligned}$$

Nun bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned} p(w, \omega + \vartheta) &= p(w, \omega) \left\{ 1 + \frac{\mu'^w e^{-i\omega}}{p(w, \omega)} (e^{-i\vartheta} - 1) - \frac{\mu'^{-w} e^{i\omega}}{p(w, \omega)} (e^{i\vartheta} - 1) \right\} \\ &\quad (0 < \vartheta < \varepsilon_0), \\ p(w, \omega + \vartheta) &= p(w, \omega + \pi) \left\{ 1 + \frac{\mu'^w e^{-i\omega}}{p(w, \omega)} (e^{i\vartheta'} - 1) - \frac{\mu'^{-w} e^{i\omega}}{p(w, \omega)} (e^{-i\vartheta'} - 1) \right\} \\ &\quad (0 < \vartheta' = \pi - \vartheta < \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Wir schreiben $\delta_\vartheta = 0$, wenn $0 < \vartheta < \varepsilon_0$, $\delta_\vartheta = 1$, wenn $\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi$, und setzen in beiden Fällen

$$(74) \quad \begin{aligned} p(w, \omega + \vartheta) &= p(w, \omega + \pi \delta_\vartheta) (1 + \lambda^*), \quad \lambda^* = \lambda^*(w, \omega, \vartheta), \\ \lambda^* &= \frac{\mu'^w e^{-i\omega}}{p(w, \omega)} \left\{ \frac{e^{-i\vartheta}}{e^{i\vartheta'}} - 1 \right\} - \frac{\mu'^{-w} e^{i\omega}}{p(w, \omega)} \left\{ \frac{e^{i\vartheta}}{e^{-i\vartheta'}} - 1 \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \vartheta < \varepsilon_0, \\ \pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Bei der Integration auf der Geraden $w = w_1 + i\alpha$ (w_1 reell), wo α nach (73) gemäß

$$(75) \quad 0 < \alpha \log \mu' < \omega \quad (0 < \vartheta < \varepsilon_0), \quad \omega < \alpha \log \mu' < \pi \quad (\pi - \varepsilon_0 < \vartheta < \pi)$$

fest gewählt werde, gilt für die Faktoren Φ der geschweiften Klammern in (74) die Abschätzung

$$|\Phi| \leq \frac{1}{\sin |\alpha \log \mu' - \omega|}.$$

Es sei $\varepsilon_0 \leq \log 2$, ϑ^* die gemeinsame Bezeichnung für ϑ und ϑ' . Es ergibt sich

$$(76) \quad |\lambda^*(w, \omega, \vartheta)| \leq \frac{4}{\sin |\alpha \log \mu' - \omega|} \vartheta^* < \frac{4 \varepsilon_0}{\sin |\alpha \log \mu' - \omega|},$$

und daher, wenn $(1 + \lambda^*)^{-\frac{s}{2}}$ als Hauptwert bestimmt wird,

$$(77) \quad \begin{aligned} p(w, \omega + \vartheta)^{-\frac{s}{2}} \\ = p(w, \omega + \pi \delta_g)^{-\frac{s}{2}} + p(w, \omega + \pi \delta_g)^{-\frac{s}{2}} \left\{ (1 + \lambda^*)^{-\frac{s}{2}} - 1 \right\}, \\ K_n(s, \omega + \vartheta) = K_n(s, \omega + \pi \delta_g) + R_n(s, \omega, \vartheta), \end{aligned}$$

$$R_n(s, \omega, \vartheta) = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w} \left\{ (1 + \lambda^*)^{-\frac{s}{2}} - 1 \right\}}{p(w, 0)^{2 + \frac{s}{2}} p(w, \omega + \pi \delta_g)^{\frac{s}{2}}} dw.$$

Hier werde ε_0 zu gegebenem α so gewählt, daß

$$(78) \quad \frac{4 \varepsilon_0}{\sin |\alpha \log \mu' - \omega|} < \frac{1}{2}.$$

Mit $\left| \frac{s}{2} \right| \leq \frac{C}{2} = \mu$ findet man dann durch eine in § 2, 3 benutzte Umformung

$$(79) \quad \left| (1 + \lambda^*)^{-\frac{s}{2}} - 1 \right| \leq |\lambda^*| 2^{\frac{C}{2} + 1} = C_7 |\lambda^*|.$$

Ferner erweist sich nach dem Vorgehen des § 3, 1 $K_n(s, \omega + \pi \delta_g)$ bei festem n und für $\sigma \geq 0$, $|s| \leq C$, $\alpha_0 \leq \omega \leq \pi - \alpha_0$ als beschränkt. Ebenso ergibt sich nach (76), (78), (79) für $\sigma \geq 0$ durch passende Wahl von α die Abschätzung

$$(80) \quad |R_n(s, \omega, \vartheta)| \leq C_8(n, C, \alpha_0, \varepsilon_0) \vartheta^*.$$

Für $\sigma < 0$ benutzen wir die Ungleichung $|p(w, \psi)|^2 \leq (\mu'^{w_1} + \mu'^{-w_1})^2$, infolge deren der Integrand von $R_n(s, \omega, \vartheta)$ dem Betrage nach durch

$$e^{\pi C + 2\pi n \alpha} C_9(\alpha_0, \varepsilon_0) \vartheta^* (\mu'^{w_1} + \mu'^{-w_1})^{-2 - \sigma} \sin^{-2 - \frac{\sigma}{2}} (\alpha \log \mu')$$

abgeschätzt werden kann. Deshalb gilt (80) allgemein, sobald

n ganz und fest, $|s| \leq C$, $\sigma \geq -2 + \alpha_0$, $\alpha_0 \leq \omega \leq \pi - \alpha_0$, $0 < \vartheta^* < \varepsilon_0$.

Schließlich bemerkt man auch, daß (80) zutrifft, falls $\varepsilon_0 \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon_0$ an Stelle der letzten dieser Ungleichungen ($0 < \vartheta^* < \varepsilon_0$) vorausgesetzt

wird. Dabei erklärt man zweckmäßig $R_n(s, \omega, \vartheta)$ nach (77) als Differenz zweier K_n -Funktionen und setzt

$$\vartheta^* = \vartheta, \delta_{\vartheta} = 0 \left(0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad \vartheta^* = \pi - \vartheta, \delta_{\vartheta} = 1 \left(\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi \right).$$

Zum Beweise zeigen wir allgemein, daß $K_n(s, \psi)$ für festes n , $|s| \leq C$, $\sigma \geq -2 + \alpha_0$ und $\alpha_0 \leq \psi \leq 2\pi - \alpha_0$ beschränkt ist. Bei der Abschätzung des Integranden erscheinen im Nenner die Sinus von $\alpha \log \mu'$ und von $\psi - \alpha \log \mu'$. Nun wird

$$0 < \alpha \log \mu' < \psi, \quad 0 < \psi - \alpha \log \mu' < \psi \quad (\alpha_0 \leq \psi \leq \pi), \\ \psi - \pi < \alpha \log \mu' < \pi, \quad \psi - \pi < \psi - \alpha \log \mu' < \pi \quad (\pi \leq \psi \leq 2\pi - \alpha_0).$$

In beiden Fällen wähle man $\alpha \log \mu' = \frac{\psi}{2}$, so daß $\psi - \alpha \log \mu' = \frac{\psi}{2}$ und $\frac{\alpha_0}{2} \leq \frac{\psi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ($\alpha_0 \leq \psi \leq \pi$), $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\psi}{2} \leq \pi - \frac{\alpha_0}{2}$ ($\pi \leq \psi \leq 2\pi - \alpha_0$).

Daraus folgt die Behauptung: Es gilt unter den n, s, ω oben auferlegten Bedingungen (also ohne eine Einschränkung bezüglich ϑ):

$$(80a) \quad |R_n(s, \omega, \vartheta)| \leq C_{10}(n, C, \alpha_0) \vartheta^*.$$

Das mit $B \subset \mathfrak{S}(H, \Gamma)$ gebildete Reihenglied von $Y(s, \tau, u, n)$ enthält $K_n(s, \omega + \vartheta)$ mit $\vartheta = \vartheta_B = \arg B \tau$. Wir schreiben wie früher $\vartheta_B = \vartheta_B(\tau) = \arg B \tau$, ferner

$$\vartheta_B^* = \vartheta_B^*(\tau) = \vartheta_B \left(0 < \vartheta_B \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad \vartheta_B^* = \vartheta_B^*(\tau) = \pi - \vartheta_B \left(\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_B < \pi \right), \\ \delta_B(\tau) = 0 \left(0 < \vartheta_B \leq \frac{\pi}{2} \right), \quad \delta_B(\tau) = 1 \left(\frac{\pi}{2} < \vartheta_B(\tau) < \pi \right)$$

und erhalten, wenn $0 < \arcsin v \leq \frac{\pi}{2}$ für $0 < v \leq 1$ vorgeschrieben wird,

$$(81) \quad \vartheta_B^*(\tau) = \arcsin \frac{\Im B \tau}{|B \tau|} \leq \frac{\pi}{2} \frac{\Im B \tau}{|B \tau|} = \frac{\pi}{2} \frac{y}{|\beta_1 \tau + \beta_2| |\beta_1' \tau + \beta_2'|}.$$

Die mit $B \subset \mathfrak{S}(H, \Gamma)$ ausgeführte Zerlegung

$$K_n(s, \omega + \vartheta_B(\tau)) = K_n(s, \omega + \pi \delta_B(\tau)) + R_n(s, \omega, \vartheta_B(\tau))$$

hat den Nachteil, daß beide Summanden auf der rechten Seite wegen des Bedeutungswechsels von $\delta_B(\tau)$ unstetige Funktionen von τ sind. Aus diesem Grunde setzen wir

$$\delta_B^0 = \delta_B(\tau^0)$$

für den in § 1 zuerst genannten festen Punkt $\tau = \tau^0$ und zerlegen die Funktion $K_n(s, \omega + \vartheta_B(\tau))$ gemäß

$$(77a) \quad \begin{aligned} K_n(s, \omega + \vartheta_B(\tau)) &= K_n(s, \omega + \pi \delta_B^0) + S_n(s, \omega, B, \tau), \\ S_n(s, \omega, B, \tau) &= K_n(s, \omega + \pi \delta_B(\tau)) - K_n(s, \omega + \pi \delta_B^0) + \\ &\quad + R_n(s, \omega, \vartheta_B(\tau)). \end{aligned}$$

Es sei

$$(82) \quad n \text{ ganz und fest, } |s| \leq C, \sigma \geq -2 + \alpha_0, \\ \tau \in \mathfrak{f}, \alpha_0 \leq \omega \leq \pi - \alpha_0, B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma).$$

Dann gibt es eine endliche, von $\mathfrak{f}$ abhängige Teilmenge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{S}(H, \Gamma)$ derart, daß

$$\delta_B(\tau) = \delta_B^0 \quad \text{für } B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma) - \mathfrak{E}, \tau \in \mathfrak{f},$$

und daß mithin nach (80a)

$$(80b) \quad |S_n(s, \omega, B, \tau)| = |R_n(s, \omega, \vartheta_B(\tau))| \leq C_{10}(n, C, \alpha_0) \vartheta_B^*(\tau).$$

Für $B \in \mathfrak{E}$, $\tau \in \mathfrak{f}$ hat die Menge der $\vartheta_B^*(\tau)$ eine positive untere Schranke, und deshalb gilt (80b) bei passender Wahl von C_{10} unter den Bedingungen (82) allgemein. In (77a) aber sind $K_n(s, \omega + \pi \delta_B^0)$ (als von τ nicht abhängige Funktion) und $S_n(s, \omega, B, \tau)$ stetige Funktionen der sämtlichen Variablen s, ω, τ und für $\sigma > -2$ analytische Funktionen von s .

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir die Reihen

$$(83) \quad \begin{aligned} X(s, \tau, \omega, n) \\ = \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}} K_n(s, \omega + \pi \delta_B^0), \end{aligned}$$

$$(84) \quad \begin{aligned} V(s, \tau, \omega, n) \\ = \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}} S_n(s, \omega, B, \tau) \end{aligned}$$

mit der Summe

$$(85) \quad Y(s, \tau, u, n) = X(s, \tau, \omega, n) + V(s, \tau, \omega, n) \quad (\omega = \arg u).$$

Aus (80b) und (81) folgt, daß die Reihe $V(s, \tau, \omega, n)$ für $|s| \leq C, \sigma \geq -2 + \alpha_0$, $\tau \in \mathfrak{f}$ und $\alpha_0 \leq \omega \leq \pi - \alpha_0$ gleichmäßig konvergiert. Sie stellt daher für alle τ in der oberen Halbebene, alle ω mit $0 < \omega < \pi$ und alle s mit $\sigma > -2$ eine stetige Funktion von s, τ, ω dar, die sich als Funktion von s im Gebiete

$\sigma > -2$ regulär-analytisch verhält. Für $s = 0$ verschwindet sie identisch in τ und ω , weil $K_n(0, \psi)$ von ψ nicht abhängt, und daher $S_n(0, \omega, B, \tau)$ identisch verschwindet.

Mithin haben wir erkannt

Satz 4. Die durch (83) erklärte Funktion $X(s, \tau, \omega, n)$ ist für alle τ in der oberen Halbebene, alle ω zwischen 0 und π und alle s mit $\sigma > -\frac{1}{2}$ in den Variablen s, τ, ω stetig und als Funktion von s regulär-analytisch. Ihr Nullwert $X(0, \tau, \omega, n)$ stimmt mit $Y(0, \tau, u, n)$ für $\omega = \arg u$ überein, hängt daher von ω nicht ab und stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ von den in Satz 3 genannten Eigenschaften dar.

2. Zweite Approximation von $Y(s, \tau, u, n)$.

Wir beweisen zunächst die Formel

$$(86) \quad K_{-n}(s, 2\pi - \psi) = e^{-\frac{2\pi^2 n}{\log \mu'}} K_n(s, \psi) \quad (0 < \psi < 2\pi).$$

In dem Integral

$$K_{-n}(s, 2\pi - \psi) = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{2\pi i n w} dw}{(\mu'^w - \mu'^{-w})^{2 + \frac{s}{2}} (\mu'^w e^{i\psi} - \mu'^{-w} e^{-i\psi})^{\frac{s}{2}}}$$

mit

$$\max(0, \pi - \psi) < \alpha \log \mu' < \min(2\pi - \psi, \pi)$$

substituiere man $w = \frac{\pi i}{\log \mu'} - w', w' = -w_1 + i\alpha', \alpha' = \frac{\pi}{\log \mu'} - \alpha$. Dann gilt

$$\max(0, \psi - \pi) < \alpha' \log \mu' < \min(\psi, \pi), \quad \mu'^w = -\mu'^{-w'},$$

und daraus folgt die Behauptung.

Die weiteren Untersuchungen richten sich auf die Reihe

$$(87) \quad \Xi(s, \tau, n) = \Xi_{-2}(s, \tau, H, \Gamma(N), n) \\ = \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}},$$

die für $\tau \in \mathfrak{F}$, $\sigma \geq \alpha_0$ ($\alpha_0 > 0$) gleichmäßig konvergiert und für die τ in der oberen Halbebene eine im Gebiete $\sigma > 0$ reguläre analytische Funktion von s darstellt. Unser Ziel besteht in der analytischen Fortsetzung dieser Funktion von s in eine volle Umgebung des Punktes $s = 0$ und in dem Nachweis, daß der so erklärte Nullwert $\Xi(0, \tau, n)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ darstellt, deren metrische Eigenschaften denen der hyperbolischen Quersummen $\{\Gamma, -r, v\}$ im Falle absoluter Konvergenz ($r > 2, |v| = 1$) genau entsprechen.

Wir zeigen zunächst, wie man dieses Ziel für $n = 0$ nunmehr schnell erreicht. Wir bilden für ein beliebiges ω mit $0 < \omega < \pi$ die Funktion

$$(88) \quad W(s, \tau, \omega, 0) = X(s, \tau, \omega, 0) + X(s, \tau, \pi - \omega, 0) \\ = \sum_{\mathbf{B} \in \mathfrak{S}(\mathbf{H}, \Gamma)} \frac{1}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}} \times \\ \times \{K_0(s, \omega + \pi \delta_{\mathbf{B}}^0) + K_0(s, \pi - \omega + \pi \delta_{\mathbf{B}}^0)\}.$$

Nach (86) gilt ($n = 0$):

$$K_0(s, \omega + \pi) + K_0(s, 2\pi - \omega) = K_0(s, \omega) + K_0(s, \pi - \omega),$$

was besagt, daß $K_0(s, \omega + \pi \delta_{\mathbf{B}}^0) + K_0(s, \pi - \omega + \pi \delta_{\mathbf{B}}^0)$ von $\delta_{\mathbf{B}}^0$ und damit von $\mathbf{B}$ nicht abhängt. Demgemäß finden wir

$$(89) \quad W(s, \tau, \omega, 0) = \{K_0(s, \omega) + K_0(s, \pi - \omega)\} \Xi(s, \tau, 0).$$

Hier wollen wir, um die von ω unabhängige Funktion $\Xi(s, \tau, 0)$ in der Umgebung des Punktes $s = 0$ zu erklären, $\omega = \frac{\pi}{2}$ setzen. Aus

$$K_0(0, \omega) = \frac{-1}{2 \log \mu'} \neq 0 \quad [(15)]$$

folgt $K_0(s, \omega) \neq 0$ für $|s| < \varrho_0$ bei festem ω und hinreichend kleinem $\varrho_0 > 0$.

Man erhält also für die τ in der oberen Halbebene und für $|s| < \varrho_0$

$$(90) \quad \Xi(s, \tau, 0) = K_0\left(s, \frac{\pi}{2}\right)^{-1} X\left(s, \tau, \frac{\pi}{2}, 0\right),$$

insbesondere nach Satz 4

$$(90a) \quad \Xi(0, \tau, 0) = -2 \log \mu' Y(0, \tau, u, 0)$$

und nach (69) in der Bezeichnung (68)

$$(91) \quad (\varphi(\tau), \Xi(0, \tau, 0)) = 4\pi \log \mu' b_0(\mathbf{H}).$$

Im übrigen hat der Faktor $\varepsilon_r(n, \mu')$ aus (J IV), (26a) hier den Wert

$$(92) \quad \varepsilon_2(n, \mu') = 2 \frac{(\log \mu')^2}{\pi n} \left(1 - e^{-\frac{2\pi^2 n}{\log \mu'}}\right) (n \neq 0), \quad \varepsilon_2(0, \mu') = 4\pi \log \mu'.$$

Wir formulieren dieses Ergebnis über die Funktion $\Xi(s, \tau, 0)$ in dem

Satz 5. Die durch (87) für $n = 0$ erklärte Funktion $\Xi(s, \tau, 0)$ ist für die τ in der oberen Halbebene und die s mit $\sigma > 0$ in den Variablen s und τ stetig und in s regulär-analytisch. Als Funktion von s ist $\Xi(s, \tau, 0)$ in eine volle Umgebung $|s| < \varrho_0$ ($0 < \varrho_0 < \frac{1}{3}$) des Punktes $s = 0$ regulär-analytisch fortsetzbar

und hat die oben genannten Eigenschaften für die τ in der oberen Halbebene und die s in der Vereinigung der Gebiete $\sigma > 0$ und $|s| < \varrho_0$. Der Nullwert $\Xi(0, \tau, 0)$ stellt eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$ dar, deren metrisches Verhalten dem der hyperbolischen Quersummen in den Fällen absoluter Konvergenz genau entspricht.

Der Beweis des analogen Satzes für die Funktionen $\Xi(s, \tau, n)$ bei beliebigem ganzem n erfordert eine etwas umständliche Untersuchung. Wir bilden mit dem in § 1 genannten, fest gewählten Punkt $\tau = \tau^0$ die Reihen

$$(93) \quad W_0(s, \tau, n) = \sum_{\substack{B \in \mathfrak{G}(H, \Gamma) \\ 0 < \arg B \tau^0 < \frac{\pi}{2}}} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}},$$

$$W_1(s, \tau, n) = \sum_{\substack{B \in \mathfrak{G}(H, \Gamma) \\ \frac{\pi}{2} < \arg B \tau^0 < \pi}} \frac{(B\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}}{(\beta_1 \tau + \beta_2)(\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}},$$

in denen $\Im m \tau > 0$, $\sigma = \Re s > 0$, n ganz und $\neq 0$. Evident bestehen die drei Gleichungen

$$(94) \quad \Xi(s, \tau, n) = W_0(s, \tau, n) + W_1(s, \tau, n),$$

$$(95) \quad \begin{aligned} X(s, \tau, \omega, n) &= W_0(s, \tau, n) K_n(s, \omega) + W_1(s, \tau, n) K_n(s, \pi + \omega), \\ X(s, \tau, \pi - \omega, n) &= W_0(s, \tau, n) K_n(s, \pi - \omega) + W_1(s, \tau, n) K_n(s, 2\pi - \omega). \end{aligned}$$

Wir fassen (95) als lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $W_0(s, \tau, n)$ und von $W_1(s, \tau, n)$ auf. In Betracht kommen dabei die Werte von s in einer Umgebung des Punktes $s = 0$. Die Determinante

$$D_n(s, \omega) = K_n(s, \omega) K_n(s, 2\pi - \omega) - K_n(s, \pi + \omega) K_n(s, \pi - \omega)$$

des Gleichungssystems (95) verschwindet für $s = 0$, da $K_n(0, \omega)$ von ω nicht abhängt. Wir zeigen jetzt, daß $D_n(s, \omega)$ wenigstens für einen Wert $\omega = \omega_0$ und für ein gewisses $\varrho_n > 0$ im punktierten Kreise $0 < |s| < \varrho_n$ nicht verschwindet, und darüber hinaus, daß $D_n(s, \omega_0)$ im Punkte $s = 0$ eine Nullstelle von genau erster Ordnung aufweist.

Beim Beweis werden die auftretenden Funktionen $K_n(s, \omega)$ nach s und ω differenziert. Durch einen Akzent kennzeichnen wir die Ableitung nach s , durch einen Stern die Ableitung nach ω . Die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen ist offenbar statthaft.

Aus (86) folgt

$$D_n(s, \omega) = e^{\frac{2\pi^2 n}{\log \mu'}} \Delta_n(s, \omega),$$

$$\Delta_n(s, \omega) = K_n(s, \omega)K_{-n}(s, \omega) - K_n(s, \pi - \omega)K_{-n}(s, \pi - \omega).$$

Im folgenden wird $\Delta_n(s, \omega)$ untersucht. Wir differenzieren $\Delta_n(s, \omega)$ nach s und setzen im Ergebnis $s = 0$. Da $K_n(0, \omega)$ von ω nicht abhängt, schreiben wir $K_n(0, \omega) = K_n(0)$. Man erhält

$$\Delta'_n(0, \omega) = K_n(0)(K'_{-n}(0, \omega) - K'_{-n}(0, \pi - \omega)) + \\ + K_{-n}(0)(K'_n(0, \omega) - K'_n(0, \pi - \omega))$$

mit

$$(96) \quad K_n(0) = k_n = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{(\mu'^w - \mu'^{-w})^2} dw, \\ K'_n(0, \omega) = -\frac{1}{2} \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{(\mu'^w - \mu'^{-w})^2} \log(\mu'^w e^{-i\omega} - \mu'^{-w} e^{i\omega}) dw + c_n, \\ c_n = -\frac{1}{2} \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{(\mu'^w - \mu'^{-w})^2} \log(\mu'^w - \mu'^{-w}) dw, \\ \max(0, \omega - \pi) < \alpha \log \mu' < \min(\omega, \pi).$$

Nunmehr berechnen wir $\Delta_n^{*}(0, \frac{\pi}{2})$. Man findet

$$(97) \quad K_n^{*}(0, \omega) = \frac{i}{2} \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{(\mu'^w - \mu'^{-w})^2} \frac{\mu'^w + \mu'^{-w} e^{2i\omega}}{\mu'^w - \mu'^{-w} e^{2i\omega}} dw, \\ K_n^{*}(0, \frac{\pi}{2}) = \frac{i}{2} l_n = \frac{i}{2} \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{\mu'^{2w} - \mu'^{-2w}} dw, \\ \Delta_n^{*}(0, \frac{\pi}{2}) = i(k_n l_{-n} + k_{-n} l_n).$$

k_n wird durch (96) mit $0 < \alpha \log \mu' < \pi$, l_n durch (97) mit $0 < \alpha \log \mu' < \frac{\pi}{2}$ erklärt. Wir bringen die beiden Integrale auf die Gestalt

$$k_n = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{\mu'^{2w} e^{-2\pi i n w}}{(\mu'^{2w} - 1)^2} dw, \quad l_n = \int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} \frac{\mu'^{2w} e^{-2\pi i n w}}{\mu'^{4w} - 1} dw,$$

berechnen die Residuen der Integranden in ihren Polen und erkennen durch höchst einfache Abschätzungen an den Darstellungen (96), (97) folgendes: Bildet man die Integrale mit den Integranden von k_n und l_n , erstreckt über den durch $\Im w \neq \alpha$ bestimmten Teil des Randes der Rechtecke

$$|\Re w| \leq \xi, \quad \alpha \leq \Im w \leq \xi \quad (n < 0), \quad -\xi \leq \Im w \leq \alpha \quad (n > 0),$$

wo $\xi = \frac{\pi}{2 \log \mu'} \left(m + \frac{1}{2}\right)$ mit natürlichem m über alle Grenzen wächst, so streben diese Integrale gegen Null. Daraus folgt nach dem Residuensatz

$$(98) \quad k_n = \frac{-\pi^2 n}{\log^2 \mu'} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi^2 n}{\log \mu'}}} \quad (n \neq 0),$$

$$(99) \quad i l_n = \frac{\pi}{2 \log \mu'} \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi^2 n}{\log \mu'}}} \quad (n \neq 0).$$

Es ist also stets $k_n < 0$, $i l_n > 0$ und $\Delta_n'^*(0, \frac{\pi}{2}) < 0$.

Diesem Ergebnis entnimmt man zunächst die Existenz eines Wertes $\omega = \omega_0$ in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$, für den $\Delta_n'(0, \omega_0) \neq 0$ ausfällt, woraus hervorgeht, daß $\Delta_n(s, \omega_0)$ nicht identisch in s verschwindet. Insbesondere gibt es eine positive Zahl $\varrho_n < \frac{1}{3}$ derart, daß

$$(100) \quad \Delta_n(s, \omega_0) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 < |s| < \varrho_n;$$

$\Delta_n(s, \omega_0)$ hat im Punkte $s = 0$ eine Nullstelle von genau erster Ordnung. Die gleichen Aussagen bestehen wörtlich für $D_n(s, \omega_0)$. Offenbar sind $\Delta_n(s, \omega_0)$ und $D_n(s, \omega_0)$ für $\sigma > -2$ reguläre analytische Funktionen von s .

Aus (94) gewinnt man die Darstellung

$$(101) \quad \begin{aligned} D_n(s, \omega_0) W_0(s, \tau, n) &= X(s, \tau, \omega_0, n) K_n(s, 2\pi - \omega_0) - \\ &\quad - X(s, \tau, \pi - \omega_0, n) K_n(s, \pi + \omega_0), \\ D_n(s, \omega_0) W_1(s, \tau, n) &= -X(s, \tau, \omega_0, n) K_n(s, \pi - \omega_0) + \\ &\quad + X(s, \tau, \pi - \omega_0, n) K_n(s, \omega_0). \end{aligned}$$

Die rechten Seiten beider Gleichungen stellen für die τ in der oberen Halbebene und für die s mit $\sigma > -\frac{1}{3}$ stetige Funktionen von s und τ und regulär-analytische Funktionen von s dar. Nach Satz 4 verschwinden die rechten Seiten für $s = 0$ identisch in τ . Daraus ersieht man:

Für beliebiges festes τ in der oberen Halbebene sind die Funktionen $W_0(s, \tau, n)$ und $W_1(s, \tau, n)$ aus der Halbebene $\sigma > 0$ in die Umgebung $|s| < \varrho_n$ des Punktes $s = 0$ regulär-analytisch fortsetzbar.

Wesentlich mehr erfährt man über die Funktion $\Xi(s, \tau, n)$. Es sei
 $J_1(s) = K_n(s, 2\pi - \omega_0) - K_n(s, \pi - \omega_0)$, $J_0(s) = K_n(s, \omega_0) - K_n(s, \pi + \omega_0)$.
 Dann gilt nach (94) und (101):

$$D_n(s, \omega_0) \Xi(s, \tau, n) = J_1(s) X(s, \tau, \omega_0, n) + J_0(s) X(s, \tau, \pi - \omega_0, n).$$

Die Funktionen $J_0(s)$ und $J_1(s)$ verhalten sich im Gebiete $\sigma > -2$ regulär-analytisch. Beide verschwinden für $s = 0$. Dies besagt, daß $\Xi(s, \tau, n)$ für τ in der oberen Halbebene und die s auf der Vereinigung der Gebiete $\sigma > 0$ und $|s| < \varrho_n$ eine stetige Funktion von s und τ und eine reguläre analytische Funktion von s darstellt. Weiter folgt aus (94) und der ersten Gleichung (95) für $s = 0$

$$X(0, \tau, \omega_0, n) = Y(0, \tau, u, n) = k_n \Xi(0, \tau, n).$$

Mithin ist $\Xi(0, \tau, n)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma(N), -2, 1\}$. Da überdies nach (92) und (98)

$$(102) \quad -\frac{2\pi}{k_n} = \varepsilon_2(n, \mu') \quad (n = 0 \text{ und } n \neq 0)$$

zutritt, so ergibt sich nach (69) in der Bezeichnung (68)

$$(103) \quad (\varphi(\tau), \Xi(0, \tau, n)) = \varepsilon_2(n, \mu') b_n(H).$$

Wir können nunmehr das Hauptergebnis unserer Untersuchung über die Quersummen $\Xi_{-2}(s, \tau, H, \Gamma(N), n)$ in dem folgenden Satz zusammenstellen:

Satz 6. *Es sei N eine natürliche Zahl; $\Gamma = \Gamma(N)$ die Hauptkongruenzuntergruppe der Modulgruppe von der Stufe N ; $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable mit positivem Realteil σ , $\tau = x + iy$ eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil y ; η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von $\Gamma(N)$; H eine zweireihige normierte Matrix mit $H\eta = 0$, $H\eta' = \infty$; $\mathfrak{S}(H, \Gamma)$ ein System von Matrizen $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$ aus der Nebengruppe $H\Gamma$, welche sich nicht in eine normierte Diagonalmatrix mit positiver Spur als linkem Faktor untercheiden; $\begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \mu'^{-1} \end{pmatrix}$ unter den Matrizen dieser Gestalt aus $H\Gamma H^{-1}$ diejenige mit kleinstem $\mu' > 1$; n eine ganze Zahl.*

Nach bekannten Sätzen konvergiert die Reihe

$$\Xi_{-2}(s, \tau, H, \Gamma(N), n) = \sum_{B \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{\frac{\pi i n}{\log \mu'} (B\tau)}{(\beta_1 \tau + \beta_2) (\beta'_1 \tau + \beta'_2) |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta'_1 \tau + \beta'_2|^{\frac{s}{2}}}$$

für $\sigma > 0$, $y > 0$ und stellt in diesem Gebiete eine stetige Funktion von s und τ und eine reguläre analytische Funktion von s dar. Darüber hinaus ist jetzt be-

wiesen, daß die Funktion $\Xi_{-2}(s, \tau, H, \Gamma(N), n)$ in die Vereinigung $\mathfrak{B}_n$ der Gebiete $\sigma > 0$ und $|s| < \varrho_n$ regulär-analytisch fortgesetzt werden kann, genauer: $\Xi_{-2}(s, \tau, H, \Gamma(N), n)$ ist für $s \in \mathfrak{B}_n$, $y > 0$ eine stetige Funktion von s und τ und eine reguläre analytische Funktion von s . Dabei bezeichnet ϱ_n eine gewisse positive Zahl $< \frac{1}{3}$. Der Nullwert

$$\Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N), n)$$

stellt eine ganze Spitzenform zur Gruppe $\Gamma(N)$ von der Dimension -2 dar. Das metrische Verhalten des Nullwertes $\Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N), n)$ steht in genauer Analogie zu dem der hyperbolischen Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, n)$ in den Fällen $r > 2$, $|v| = 1$ absoluter Konvergenz.

§ 5.

Hauptsysteme. Neue Vollständigkeitssätze.

Im folgenden handelt es sich zunächst um einen Nachtrag zur Theorie der sogenannten Hauptsysteme [(J III), § 1], und zwar bei allgemeinen Klassen $\{\Gamma, -r, v\}$, wo Γ von erster Art, $r > 0$, $|v| = 1$. Wir betrachten die Schar $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(\Gamma, -r, v)$ der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$. Von ihrem Rang μ wird $\mu > 0$ vorausgesetzt.

Zur Erklärung der Hauptsysteme bezeichne $\zeta = A^{-1}\infty$ eine Spitze von Γ , dabei $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix. Die Formen $\varphi_j(\tau)$ ($1 \leq j \leq \mu$) mögen eine Basis von $\mathfrak{C}_0$ bilden. Der Vektor

$$(104) \quad \mathfrak{q}(\tau) = \{\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_j(\tau), \dots, \varphi_\mu(\tau)\}$$

gestattet in der Spitze $\tau = \zeta$ eine Entwicklung von der Gestalt

$$(105) \quad \mathfrak{q}(\tau) = (a_1 \tau + a_2)^{-r} \sum_{n+\kappa > 0} \mathfrak{b}_n e^{\frac{2\pi i(n+\kappa)A\tau}{N}}, \quad \mathfrak{b}_n = \{b_{1,n}, \dots, b_{j,n}, \dots, b_{\mu,n}\}.$$

Hier ist $P = A^{-1}U^N A$ die normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_\zeta$, $v(P) = e^{2\pi i \kappa}$ ($0 \leq \kappa < 1$). Aus einfachen Überlegungen erhellt die Existenz eines Systems ganzer Zahlen n_k ($1 \leq k \leq \mu$) derart, daß $n_k + \kappa > 0$ und daß die Vektoren $\mathfrak{b}_{n_k}$ ($1 \leq k \leq \mu$) linear unabhängig sind. Jedes solche System von Zahlen n_k ($1 \leq k \leq \mu$) heißt ein Hauptsystem der Schar $\mathfrak{C}_0$ im Punkte $\tau = \zeta$. Entsprechend werden die Hauptsysteme von $\mathfrak{C}_0$ in den Punkten der oberen Halbebene und in den hyperbolischen Fixpunktpaaren erklärt. Die Eigenschaft eines Zahlensystems, ein Hauptsystem zu bilden, hängt von der Basis der Schar $\mathfrak{C}_0$ nicht ab.

Es ist klar, daß man allein aus der linearen Unabhängigkeit irgendwelcher Funktionen $\varphi_j(\tau)$ ($1 \leq j \leq \mu$), die eine Entwicklung von der Gestalt (105) zulassen, nicht *mehr* ableiten kann, als die Existenz *eines* Hauptsystems. Wir zeigen, daß die Schar $\mathfrak{C}_0$ in jedem Punkte, auch unter verschärfenden Bedingungen, unendlich viele Hauptsysteme besitzt.

Zum Beweise dient ein Hilfssatz über das Anwachsen ganzer automorpher Spitzenformen bei Annäherung an den Rand der oberen Halbebene. Hier weiß man nach (J III), Satz 10, daß eine ganze Spitzenform $\varphi(\tau) \in \{\Gamma, -r, v\}$ einer Ungleichung

$$|\varphi(\tau)| \leq C_{11} y^{-\frac{r}{2}} \quad (\tau = x + iy, x \text{ reell, } 0 < y \leq 1)$$

mit konstantem, nur von $\varphi(\tau)$ abhängigem $C_{11} = C_{11}(\varphi)$ genügt. Wir behaupten

Satz 7. *Es sei Γ von erster Art, $r > 0$, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$ vom Betrage 1, $\varphi(\tau)$ eine ganze, nicht identisch verschwindende Spitzenform $\{\Gamma, -r, v\}$. Dann gibt es in beliebiger Nähe jedes Punktes der reellen Achse Punkte (und mithin ganze horizontale E-Strecken von Punkten) τ derart, daß*

$$|\varphi(\tau)| \geq C_{12} y^{-\frac{r}{2}} \quad (\tau = x + iy, x \text{ reell, } 0 < y \leq 1)$$

mit einer nur von $\varphi(\tau)$ abhängigen Konstanten $C_{12} = C_{12}(\varphi)$ zutrifft.

Zum Beweise stellen wir vorab fest, daß die Aussage des Satzes gegen Transformationen der oberen Halbebene in sich invariant ist. Bezeichnet

$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine normierte Matrix, und setzt man

$$\varphi_S(\tau) = \varphi(S\tau) (c\tau + d)^{-r}, \quad y_S = \Im S\tau = \frac{y}{|c\tau + d|^2}, \quad g(\tau, \varphi) = y^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)|,$$

so besagt Satz 7, daß $g(\tau, \varphi) \geq C_{12}$. Die behauptete Invarianz folgt aus

$$(106) \quad g(S\tau, \varphi) = g(\tau, \varphi_S).$$

* Wir kommen nun zum Beweis und betrachten zunächst den Fall, in dem Γ parabolische Fixpunkte besitzt. Gemäß (106) werde angenommen, daß $\tau = \infty$ Spitze von Γ sei; überdies sei U^N normierte Erzeugende von $\mathfrak{Z}_{\infty}$, $v(U^N) = e^{2\pi i \kappa}$ ($0 \leq \kappa < 1$) und

$$(107) \quad \varphi(\tau) = \sum_{n+\kappa > 0} b_n e^{2\pi i(n+\kappa)\frac{\tau}{N}}$$

die Fourierentwicklung der im Text des Satzes genannten Form $\varphi(\tau)$.

Hier sei $b_{n_0} \neq 0$, $b_n = 0$ für $0 < n + \kappa < n_0 + \kappa$, $c_m = \frac{b_{n_0+m}}{b_{n_0}}$ ($m \geq 1$).

Es wird daher

$$|\varphi(\tau)| = |b_{n_0}| e^{-2\pi(n_0+\kappa)\frac{y}{N}} \left| 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi i m \frac{\tau}{N}} \right|,$$

und es gibt also eine Zahl $h_0 > 1$ von folgender Beschaffenheit: Zu jedem $h > h_0$ existiert eine nur von h und $\varphi(\tau)$ abhängige Konstante $C_{13} = C_{13}(h, \varphi)$ derart, daß

$$|\varphi(\tau)| \geq C_{13} \quad (h_0 \leq y \leq h).$$

Für beliebiges $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ finden wir mit $\tau' = L\tau = x' + iy'$ (x' reell, $y' > 0$):

$$(108) \quad \begin{aligned} y^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)| &= y'^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau')| \geq y'^{\frac{r}{2}} C_{13} & (h_0 \leq y' \leq h), \\ |\varphi(\tau)| &\geq h_0^{\frac{r}{2}} C_{13} y^{-\frac{r}{2}} = C_{12} y^{-\frac{r}{2}} & (h_0 \leq y' \leq h). \end{aligned}$$

Es sei $\gamma \neq 0$. Der Bereich $h_0 \leq y' \leq h$ besteht aus den Punkten τ der oberen Halbebene, die zwischen den nachstehend beschriebenen Kreisen $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}$ oder auf einem dieser Kreise liegen: $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}$ berühren die reelle τ -Achse im Punkte $L^{-1}\infty = -\frac{\delta}{\gamma}$ und haben die Durchmesser $\frac{1}{\gamma^2 h}$ bzw. $\frac{1}{\gamma^2 h_0}$.

Da die zu $\tau = \infty$ nach Γ äquivalenten Spitzen $L^{-1}\infty$ gemäß (J IV), Satz 2 auf der reellen Achse überall dicht liegen, ist hiermit Satz 7 im vorliegenden Falle bewiesen.

Es sei nunmehr Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art ohne parabolische Matrizen. Dann hat ein kanonischer Fundamentalebenebereich $\mathfrak{R}$ von Γ endlichen H-Durchmesser. Sei also D die obere Grenze der H-Abstände zweier Punkte von $\mathfrak{R}$. Bezeichnet x_0 einen beliebigen Punkt der reellen Achse, $\tau_0 = x_0 + iy_0$ ($0 < y_0 < 1$) einen beliebigen, hinreichend nahe bei x_0 gelegenen Punkt der oberen Halbebene, L eine Matrix aus Γ mit $\tau_0 \in L\mathfrak{R}$, so liegt $L\mathfrak{R}$ auf der abgeschlossenen H-Kreisscheibe mit dem H-Radius D um τ_0 als H-Mittelpunkt und daher auf der abgeschlossenen E-Kreisscheibe mit dem E-Radius $y_0(e^D - 1)$ um den Punkt τ_0 als E-Mittelpunkt; alle Punkte von $L\mathfrak{R}$ haben also von τ_0 einen beliebig kleinen E-Abstand, falls y_0 hinreichend klein ist.

Andererseits verschwindet die Funktion $g(\tau, \varphi) = y^{\frac{r}{2}} |\varphi(\tau)|$ nur in endlich vielen Punkten von $\mathfrak{R}$ und ist gegenüber den Transformationen L

aus Γ absolut invariant. Sie nimmt daher in $\mathfrak{R}$ und ebenso in jedem Bereich $L\mathfrak{R}$ ($L \subset I'$) die sämtlichen Werte ihres Wertevorrats an. Daraus folgt auch in diesem Falle die Behauptung.

Um die angekündigten Aussagen über die Hauptsysteme einheitlich zu formulieren und zu beweisen, bedienen wir uns einer abkürzenden Terminologie. Da ferner alle Aussagen über Hauptsysteme gegenüber linearen Transformationen der oberen Halbebene in sich invariant sind, können und wollen wir annehmen, daß weder $\tau = 0$ noch $\tau = \infty$ ein hyperbolischer Fixpunkt von Γ sei. — Es sei entweder

A. $\zeta = A^{-1}\infty$ parabolischer Fixpunkt von Γ mit der bei (105) genannten Bedeutung von A , N , z . Die Entwicklung des Basisvektors (104) in der Spitze ζ sei durch (105) gegeben. Wir setzen

$$t = e^{2\pi i \frac{A\tau}{N}}, \quad t^{n+z} = e^{2\pi i (n+z) \frac{A\tau}{N}}, \quad (a_1\tau + a_2)^{-r} = \chi(\tau),$$

so daß

$$q(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n+z>0} b_n t^{n+z}, \quad b_n = b_n(A);$$

— oder es sei

$$\text{B. } z = a + ib \ (a \text{ reell, } b > 0), \quad t = \frac{\tau + \bar{z}}{\tau + z}, \quad \chi(\tau) = (\tau + z)^{-r} \text{ und}$$

$$q(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad b_n = b_n(-\bar{z}),$$

die Entwicklung von $q(\tau)$ im Punkte $\tau = -\bar{z}$ der oberen Halbebene; — oder es sei

C. η, η' ein Paar hyperbolischer Fixpunkte von Γ , $\eta = H^{-1}0$, $\eta' = H^{-1}\infty$ mit normiertem $H = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 \end{pmatrix}$, $H = H^{-1}D_{\mu'}H$ normierte Erzeugende von $\mathfrak{J}_{\eta, \eta'}$, $v(H) = e^{2\pi i z} (0 \leq z < 1)$ und

$$t = (H\tau)^{\frac{\pi i}{\log \mu'}}, \quad t^{n+z} = (H\tau)^{\frac{\pi i (n+z)}{\log \mu'}}, \quad \chi(\tau) = (\eta_1\tau + \eta_2)^{-\frac{r}{2}} (\eta'_1\tau + \eta'_2)^{-\frac{r}{2}},$$

demgemäß

$$q(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n t^{n+z}, \quad b_n = b_n(H),$$

die Entwicklung von $q(\tau)$ nach der Ortsvariablen des Fixpunktpaares η, η' .

In allen drei Fällen setzen wir

$$b_n = \{b_{1,n}, b_{2,n}, \dots, b_{j,n}, \dots, b_{\mu,n}\},$$

daher nach (104)

$$\varphi_j(\tau) = \chi(\tau) \sum_n b_{j,n} t^{n+\kappa} \quad (1 \leq j \leq \mu)$$

mit den Summationsbedingungen $n + \kappa > 0$, $n \geq 0$, n ganz in den Fällen A., B., C. und mit $\kappa = 0$ im Falle B.

Nun sei K eine beliebige ganze Zahl ≥ -1 . Wir zeigen, daß unmöglich alle Koeffizientenvektoren b_n mit $n > K$ sich aus weniger als μ Vektoren linear zusammensetzen lassen. Sei also λ eine ganze Zahl, $1 \leq \lambda < \mu$ und seien die Vektoren

$$c_k = \{c_{1,k}, c_{2,k}, \dots, c_{\mu,k}\} \quad (1 \leq k \leq \lambda)$$

vorgelegt. Wir bestimmen die Zahlen ξ_j ($1 \leq j \leq \mu$) so, daß

$$\sum_{j=1}^{\mu} \xi_j c_{j,k} = 0 \quad (1 \leq k \leq \lambda), \quad \sum_{j=1}^{\mu} |\xi_j| > 0.$$

Wenn sich alle b_n ($n > K$) als Linearkombinationen der c_k ($1 \leq k \leq \lambda$) darstellen lassen, so existieren zu jedem $n > K$ Konstante $\vartheta_{n,k}$ ($1 \leq k \leq \lambda$) mit

$$b_n = \sum_{k=1}^{\lambda} \vartheta_{n,k} c_k, \quad \text{d. h.} \quad b_{j,n} = \sum_{k=1}^{\lambda} \vartheta_{n,k} c_{j,k}.$$

Daraus folgt $\sum_{j=1}^{\mu} \xi_j b_{j,n} = 0$ ($n > K$), d. h. die Form

$$\varphi(\tau) = \sum_{j=1}^{\mu} \xi_j \varphi_j(\tau) = \chi(\tau) \sum_n b_n t^{n+\kappa}$$

verschwindet nicht identisch, wohl aber verschwinden alle ihre Entwicklungskoeffizienten b_n mit $n > K$.

Die hier vorggeführte Schlußkette beruht auf der Annahme $\lambda > 0$. Für $\lambda = 0$ ergibt sich die letzte Folgerung unmittelbar.

Diese Aussage aber enthält einen Widerspruch zu Satz 7. Im Falle B. erkennt man $\varphi(\tau)$ als beschränkt in der oberen Halbebene, im Falle A. mit $a_1 = 0$ ebenfalls. Für $a_1 \neq 0$ schneide man aus $\mathfrak{H}$ einen beliebig kleinen E-Kreis um den Punkt $\zeta = -\frac{a_2}{a_1}$ als Mittelpunkt heraus. Dann ist $\varphi(\tau)$ auf der Restmenge beschränkt. Es liege der Fall C. vor. Mit

$$H\tau = \varrho e^{i\psi} \quad (\varrho > 0, 0 < \psi < \pi)$$

ergibt sich

$$\varphi(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n \leq K} b_n e^{\frac{\pi i (n+\kappa)}{\log \mu'} \log \varrho - \frac{\pi (n+\kappa)}{\log \mu'} \psi}.$$

Da diese Darstellung für $0 < \psi < \pi$ absolut konvergiert, so ist die Reihe für $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$ beschränkt. Die Ungleichung $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$ beschreibt in

der oberen τ -Halbebene das Innere oder Äußere des auf der reellen Achse senkrechten E-Halbkreises durch η und η' einschließlich seiner Peripherie. Schneidet man aus diesem Bereich zwei hinreichend kleine E-Kreise um die Punkte η und η' heraus, so enthält der Restbereich eine Teilstrecke der reellen Achse. — Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man im Falle C., wenn man voraussetzt, daß sich alle Koeffizientenvektoren b_n mit $n < -K$ aus weniger als μ Vektoren linear zusammensetzen lassen.

Wir finden also zusammenfassend

Satz 8. Die Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ (Γ von erster Art, $r > 0$, $|v| = 1$) besitzt für die Entwicklungen in den parabolischen Spitzen, in den Punkten der oberen Halbebene und in den hyperbolischen Fixpunktpaaren Hauptsysteme $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_\mu\}$, deren sämtliche Komponenten n_k ($1 \leq k \leq \mu$) eine beliebig vorgegebene Zahl K übertreffen. Sie besitzt für die Entwicklungen in den hyperbolischen Fixpunktpaaren Hauptsysteme, deren sämtliche Komponenten eine beliebig vorgegebene nicht positive Zahl unterschreiten.

Dieser Satz besagt offenbar mehr als nur die Existenz unendlich vieler Hauptsysteme. Eine andere Verschärfung dieser Existenzaussage betrifft die Frage nach der Existenz unendlich vieler Hauptsysteme, deren einige Komponenten festgehalten werden.

Zunächst erkennt man, wenn die Bezeichnungen des Beweises von Satz 8 zugrunde gelegt werden, daß es unendlich viele Koeffizientenvektoren b_n gibt, welche vom Nullvektor 0 verschieden sind. Hat man ferner für ein ganzes λ mit $1 \leq \lambda < \mu$ die λ linear unabhängigen Vektoren b_{n_k} ($1 \leq k \leq \lambda$) aufgewiesen, so gibt es unendlich viele ganze $n_{\lambda+1}$ derart, daß die $\lambda + 1$ Vektoren b_{n_k} ($1 \leq k \leq \lambda$) und $b_{n_{\lambda+1}}$ linear unabhängig sind. Wir formulieren dies als

Satz 9. Für die unter A., B., C. angegebenen Entwicklungen eines Basisvektors der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$ gilt: Es gibt unendlich viele ganze n , für die $b_n \neq 0$ ausfällt; im Falle C. gibt es unendlich viele positive und unendlich viele negative solche n . Es sei λ eine ganze Zahl mit $1 \leq \lambda < \mu$ und es seien die λ Koeffizientenvektoren b_{n_k} ($1 \leq k \leq \lambda$) linear unabhängig. Dann gibt es unendlich viele ganze n derart, daß die $\lambda + 1$ Vektoren b_{n_k} ($1 \leq k \leq \lambda$) und b_n zusammen linear unabhängig sind; im Falle C. gibt es unendlich viele positive und unendlich viele negative solche n .

Die damit gewonnenen Aussagen über Hauptsysteme ziehen nach (J III), (J IV) automatisch entsprechende Vollständigkeitssätze über die

Quersummen der drei Typen nach sich [(J III), Satz 16, 18, 18a; (J IV), Satz 5, 7, 8]. Neben diesen Sätzen aber besteht — und zwar zunächst nur für $r = 2$, $v = 1$ — ein weiterer neuartiger Vollständigkeitssatz, der sich aus den Eigenschaften der Perioden der ABELSchen Integrale erster Gattung ergibt.

Es sei $\varphi(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Gamma, -2, 1\}$. Das $\varphi(\tau)$ zugeordnete ABELSche Integral erster Gattung $\int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau) d\tau$ erfährt bei Anwendung der Substitution mit der Matrix L aus Γ den additiven Zuwachs

$$\omega(L, \varphi) = \int_{\tau_0}^{L\tau_0} \varphi(\tau) d\tau,$$

der als L -Periode von $\varphi(\tau)$ bezeichnet werde. Hat $\varphi(\tau)$ in den Bezeichnungen unter C. die Entwicklung

$$\varphi(\tau) = \chi(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(H\tau)^{\frac{\pi i n}{\log \mu'}}, \quad b_n = b_n(H),$$

so gewinnt man bei Berücksichtigung der Relationen $r = 2$ und $\chi(\tau) = (H\tau)^{-1} \frac{dH\tau}{d\tau}$ die Darstellung

$$(109) \quad \omega(H, \varphi) = 2(\log \mu') b_0(H).$$

Es mögen die Matrizen

$$(110) \quad -I, P_1, P_2, \dots, P_{\sigma_0}, E_1, E_2, \dots, E_{e_0}, G_1, H_1, G_2, H_2, \dots, G_{p_0}, H_{p_0}$$

im Sinne von (G I), § 1 ein kanonisches Erzeugendensystem von Γ bilden. Dabei entsprechen auf der einem kanonischen Fundamentalbereich $\mathfrak{R}$ von Γ zugeordneten kanonisch aufgeschnittenen RIEMANNschen Fläche den parabolischen bzw. elliptischen Matrizen P_j ($1 \leq j \leq \sigma_0$) bzw. E_k ($1 \leq k \leq e_0$) die Überschreitungen der von dem Kreuzungspunkt zu den Verzweigungspunkten unendlicher bzw. endlicher Ordnung führenden Schnitte, den hyperbolischen Matrizen G_ν, H_ν ($1 \leq \nu \leq p_0$) die Überschreitungen der Rückkehrschnitte. Ein solches G_ν oder H_ν ist im allgemeinen nicht die normierte Erzeugende der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$. Wir setzen also in Analogie zu den Bezeichnungen unter C.

$$(111) \quad G_\nu = \pm \Theta_\nu^{-1} D_{\lambda'_\nu}^{g_\nu} \Theta_\nu, H_\nu = \pm H_\nu^{-1} D_{\mu'_\nu}^{h_\nu} H_\nu \quad (1 \leq \nu \leq p_0)$$

mit ganzen $g_\nu \neq 0, h_\nu \neq 0$ und erhalten

$$(112) \quad \begin{aligned} \omega(G_\nu, \varphi) &= 2g_\nu (\log \lambda'_\nu) b_0(\Theta_\nu), \\ \omega(H_\nu, \varphi) &= 2h_\nu (\log \mu'_\nu) b_0(H_\nu). \end{aligned} \quad (1 \leq \nu \leq p_0).$$

Nunmehr folgt aus klassischen Sätzen der RIEMANNschen Funktionentheorie sowie aus (J III), Satz 15 in den Bezeichnungen von Satz 6:

Satz 10. *Man verstehe unter den Matrizen (110) ein kanonisches Erzeugendensystem von $\Gamma(N)$ ($N > 1$, $e_0 = 0$). Dabei seien durch (111) die Darstellungen der hyperbolischen Erzeugenden G_v, H_v durch die normierten Erzeugenden der jeweils zugehörigen Gruppen $\mathfrak{Z}_{\eta, \eta'}$ gegeben. Dann bilden sowohl die Quersummen*

$$\Xi_{-2}(0, \tau, \Theta_v, \Gamma(N), 0) \quad (1 \leq v \leq p_0)$$

als auch die Quersummen

$$\Xi_{-2}(0, \tau, H_v, \Gamma(N), 0) \quad (1 \leq v \leq p_0)$$

eine Basis der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma(N), -2, 1\}$.

Für allgemeine Gruppen Γ von erster Art gilt dieser Satz auch, allerdings nur insoweit man von hyperbolischen Quersummen reden kann, d. h. für die nach dem Verfahren von (J III), Satz 22 algebraisch konstruierten Formen $\Xi_{-2}(\tau, H, \Gamma, n)$. Diese Konstruktion läßt sich in allgemeinen Klassen $\{\Gamma, -r, v\}$ (Γ von erster Art, $r > 1$, $|v| = 1$) wie folgt durchführen:

Nach (21) oder (J IV), (26a) ist $\varepsilon_\tau(n, \mu')$ für ganzes n und $r > 1$ erklärt und > 0 . Es gibt höchstens eine Funktion $\Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, n)$ in $\mathfrak{C}_0$ derart, daß

$$(112) \quad (\varphi(\tau), \Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, n)) = v(H) \varepsilon_r(n, \mu') b_n(H)$$

für alle $\varphi(\tau)$ aus $\mathfrak{C}_0$ zutrifft [vgl. (J IV), (27)]. Es bezeichne $\varphi_j(\tau)$ ($1 \leq j \leq \mu$) eine normierte Orthogonalbasis von $\mathfrak{C}_0$; die Entwicklung des zugehörigen Basisvektors $q(\tau)$ nach Potenzen von $H\tau$ sei die unter C. gegebene. Die Funktion

$$(113) \quad \Xi_{-r}(\tau, v, H, \Gamma, n) = \sum_{j=1}^{\mu} \overline{v(H)} \varepsilon_r(n, \mu') \overline{b_{j,n}(H)} \varphi_j(\tau)$$

erfüllt (112) ersichtlich für $\varphi(\tau) = \varphi_k(\tau)$ ($1 \leq k \leq \mu$) und daher allgemein.

Zum Schluß erörtern wir noch kurz die Quersummen $\Xi_{-r}(\tau, v, A, \Gamma|F)$ entsprechenden Verallgemeinerungen der Formen $\Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N), n)$.

Die Erklärung einer Quersumme $\Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N)|F)$ mit $F(w) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \beta_v t^v$,

$t = w^{\frac{\pi i}{\log \mu'}}$, durch das Summationsverfahren der §§ 2 bis 4 hätte von der Reihe

$$(114) \quad \sum_{\mathbf{B} \in \mathfrak{S}(H, \Gamma)} \frac{(\mathbf{B} \tau)^{\frac{\pi i x}{\log \mu'} F(\mathbf{B} \tau)}}{(\beta_1 \tau + \beta_2) (\beta_1' \tau + \beta_2') |\beta_1 \tau + \beta_2|^{\frac{s}{2}} |\beta_1' \tau + \beta_2'|^{\frac{s}{2}}}, \quad F(w) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \beta_v w^{\frac{\pi i v}{\log \mu'}}$$

auszugehen und müßte sich auf ihre analytische Fortsetzbarkeit in eine Umgebung des Punktes $s = 0$ stützen. Da aber die Umgebungen $|s| < \varrho_n$ von $s = 0$, in welche die mit $F(w) = t^n$ gebildeten Funktionen oben fortgesetzt worden sind, von n abhängen, so erscheint dieser Ansatz zunächst wenig aussichtsreich. Es genügt für alle Zwecke indessen völlig, an Stelle von (114) die mit den bereits aussummierten Quersummen gebildeten Reihen

$$(115) \quad \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \beta_v \Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N), v)$$

heranzuziehen. Wenn eine solche Reihe in einer Umgebung einer Stelle konvergiert, so konvergiert sie in der oberen Halbebene, konvergiert gleichmäßig auf jedem Fundamentalbereich und stellt eine Form aus $\mathfrak{C}_0$ dar. Konvergenzkriterien für die Reihe (114) erhält man aus der Grundformel (103) oder der Darstellung von $\Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N), n)$ durch $Y(0, \tau, u, n)$ und (67) oder am bequemsten aus (113). Danach gilt in einer Umgebung einer Stelle $\tau_0 \in \mathfrak{H}$ eine Abschätzung

$$|\Xi_{-2}(0, \tau, H, \Gamma(N), n)| \leq C_{14} \varepsilon_2(n, \mu') \sum_{j=1}^{\mu} |b_{j,n}(H)|,$$

und hier weiß man nach (92), daß

$$\varepsilon_2(n, \mu') < \frac{2}{\pi} (\log^2 \mu') \frac{1}{n} \quad (n > 0), \quad \varepsilon_2(n, \mu') < \frac{2}{\pi} (\log^2 \mu') \frac{1}{|n|} e^{\frac{2\pi^2 |n|}{\log \mu'}} \quad (n < 0),$$

ferner daß

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_{j,n}(H)| e^{-\frac{\pi^2 n t}{\log \mu'}} \quad \text{für } 0 < t < 1 \quad \text{und } 1 \leq j \leq \mu$$

konvergiert.

(Eingegangen am 25. Mai 1943.)

Zur Iteration reeller Funktionen.

Von

U. T. Bödewadt in Posen.

Eine Funktion $f(x)$ wird iteriert, indem man in sie ihren Wert als Argument einsetzt: $f(f(x))$. Durch Wiederholung entsteht eine Funktionenfolge, die im folgenden durch Beifügung der hochgestellten Zahl der Iterationen in eckigen Klammern bezeichnet werden soll:

$$1) \quad f^{[1]}(x) = f(x), \quad f^{[n]}(x) = f(f^{[n-1]}(x)).$$

Die daraus folgenden Regeln

$$2) \quad \begin{aligned} f^{[m]}(f^{[n]}(x)) &= f^{[m+n]}(x), \\ (f^{[m]})^{[n]}(x) &= f^{[m \cdot n]}(x), \end{aligned}$$

deren Ähnlichkeit mit den Potenzgesetzen in dem Beispiel $f(x) = c \cdot x$ zur Identität wird, führen dazu, $f^{[0]}(x) = x$ zu setzen und unter $f^{[-1]}(x)$ die Umkehrfunktion zu $f(x)$ zu verstehen, so daß

$$\begin{aligned} f^{[-1]}(f(x)) &= f(f^{[-1]}(x)) = x, \\ f^{[-n]}(x) &= (f^{[-1]})^{[n]}(x) = (f^{[n]})^{[-1]}(x) \end{aligned}$$

wird.

Alle diese Iterationsstufen lassen sich gleichzeitig erklären, wenn man eine Funktion $\varphi(x)$ bestimmen kann, die der ABELschen Funktionalgleichung ¹⁾

$$3) \quad 1 + \varphi(x) = \varphi(f(x))$$

genügt; denn dann wird $k + \varphi(x) = \varphi(f^{[k]}(x))$ und also

$$4) \quad f^{[k]}(x) = \varphi^{[-1]}(k + \varphi(x)).$$

Eine solche Funktion $\varphi(x)$ leistet aber mehr: Sie liefert für gebrochenes k , solange ihre Umkehrung $\varphi^{[-1]}$ für $k + \varphi(x)$ erklärt ist, eine Schar stetig abgestufter Zwischenfunktionen zur Folge der Iterationen $f^{[n]}(x)$. Deswegen soll hier jede stetige umkehrbare Funktion $\varphi(x)$, die der ABELschen Gleichung (3) genügt, eine „Stufungsfunktion zu $f(x)$ “ heißen. Die nach (4) gebildeten Funktionen $f^{[k]}(x)$ heißen „Stufungen von $f(x)$ “, und zwar „Aufstufungen“ für $k > 0$, „Abstufungen“ für $k < 0$, „natürliche Stufungen“, wenn k einen Wert aus der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... hat,

¹⁾ N. H. ABEL, Œuvres complètes, 2. éd., Christiania 1881, Bd. II, Nr. VI, 36–39.

„natürliche Abstufungen“ für negativ ganzzahlige k , „Zwischenfunktionen“ für gebrochenes k . Die Stufungsregeln (2) gelten dann für alle reellen m und n , soweit die betreffenden Stufungen von $f(x)$ sich bilden lassen.

An Stelle der Hilfsfunktion $1 + u$, die in der ABELSchen Gleichung auftritt, kann man auch $c \cdot u$ mit $0 \neq |c| \neq 1$ nehmen und gelangt so zu der SCHRÖDERSchen Gleichung²⁾

$$(5) \quad c \cdot \psi(x) = \psi(f(x)),$$

deren Lösung ebenfalls die Stufungen von $f(x)$ liefert:

$$f^{[k]}(x) = \psi^{[-1]}(c^k \cdot \psi(x)).$$

Zu analytischem $f(x)$ läßt sich ziemlich leicht eine analytische Lösung der SCHRÖDERSchen Gleichung (5) finden, wenn man einen Ruhepunkt $z_0 = f(z_0)$ der Abbildung $z \rightarrow f(z)$ hat, in dem außerdem $0 \neq |f'(z_0)| \neq 1$ ist. Aber reelle Funktionen haben nicht immer reelle Ruhepunkte, wie schon das Beispiel $f(z) = e^z$ zeigt; die komplexen Ruhepunkte führen dann in der Regel nicht zu reellen (d. h. über der reellen Achse reellwertigen) Lösungen $\psi(x)$ von (5), und auch die daraus zu gewinnende Lösung $\psi(x) = \log \psi(x) : \log c$ von (3) pflegt nicht reell zu sein. Die vielen und reichhaltigen Untersuchungen³⁾ über die Iterationen analytischer Funktionen im Komplexen, die sich besonders eingehend mit der Natur der Ruhepunkte befassen, sind daher für eine Lösung der entsprechenden Aufgabe im Reellen ohne großen Nutzen. Erst neuerdings hat Herr KNESER nach ersten Ansätzen von BENNETT⁴⁾ für die Funktion e^z einen Weg gewiesen, um aus dem Komplexen eine auf der reellen Achse reelle und reguläre Lösung der ABELSchen Gleichung zu gewinnen⁵⁾.

²⁾ E. SCHRÖDER, Math. Ann. **3** (1871), S. 296–322.

³⁾ Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien einige der wichtigeren genannt, wobei insbesondere die Untersuchungen über wiederholte Mittelbildung aus mehreren Veränderlichen nicht berücksichtigt sind: M. A. KORKINE, Bull. Sci. Math. (2) **6**₁ (1882), S. 228–242; J. FARKAS, J. Math. pur. appl. (3) **10** (1884), S. 101–108; G. KÖNIGS, Bull. Sci. Math. (2) **7**₁ (1883), S. 340–357; C. R. Paris **99** (1884), S. 1016–1017; Ann. Ecol. norm. (3) **2** (1885), S. 385–404; L. LEAU, Ann. Toulouse **11** E, S. 1–110; P. FATOU, Bull. Soc. Math. France **47** (1919), S. 161–271; **48** (1920), S. 33–94, 208–314; J. Math. pur. appl. (9) **3** (1924), S. 1–49; G. JULIA, ebenda (8) **1** (1918), S. 47–245; Acta Math. **56** (1931), S. 149–195; **58** (1932), S. 407–412; P. MONTEL, Ann. Ecol. norm. (3) **50** (1933), S. 171–196; J. WOLFF, Bull. Soc. Math. France **57** (1929), S. 195–203; C. R. Paris **194** (1932), S. 833–834; G. VALIRON, Bull. Sci. Math. (2) **55** (1931), S. 105–128; H. CREMER, Jahresber. D. M. V. **33** (1925), S. 185–210; Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig **84** (1932), S. 291–324; Math. Ann. **110** (1935), S. 739–744; H. TÖPFFER, Math. Ann. **117** (1940), S. 65–84.

⁴⁾ A. A. BENNETT, Ann. of Math. (2) **17** (1915), S. 23–60, 74–75.

⁵⁾ H. KNESER in einem Vortrage auf der Mathematiker-Zusammenkunft im Oktober 1942 in Freiburg i. Br. — Meine Kenntnis des Inhalts verdanke ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. KNESER.

Die nachstehenden, ganz im Reellen verlaufenden Ausführungen zeigen in § 2 für eine mit Rücksicht auf eindeutige Umkehrbarkeit ausgewählte Funktionenklasse S , daß es zu jeder stetigen reellen Funktion $f(x)$ aus S mit endlichvielen oder unbeschränkt vielen stetigen Ableitungen eine reelle Lösung der ABELSchen Gleichung mit denselben Stetigkeitseigenschaften gibt, die sich also vermöge (4) auf alle Stufungen von $f(x)$ übertragen. Zum Beweise werden im Anschluß an eine Methode, die HURWITZ bei linearen Differenzengleichungen benutzte ⁶⁾, BERNOULLISCHE Polynome verwendet. § 1 bringt vorbereitend die Abgrenzung der Klasse S und einen Hilfssatz, § 3 den Konvergenzbeweis für vollableitbare reelle Funktionen. Aus einer in § 4 bewiesenen Determinantenformel für die Ableitungen der Zwischenfunktionen wird in § 5 eine Bedingung hergeleitet, welche die Stufungsfunktionen zu erfüllen haben, wenn Vollmonotonie von $f(x)$ bei der Bildung der Zwischenfunktionen erhalten bleiben soll.

§ 1.

Vorbereitungen.

Erklärung 1. Eine Funktion $f(x)$ gehört zur Klasse S („stufbare Funktionen“), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1) $f(x)$ ist über einem Abschnitt (a, b) der reellen Geraden als reelle stetige Funktion erklärt: $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

2) $f(x)$ ist in (a, b) eine wachsende Funktion: für $a < x_1 < x_2 < b$ ist stets $f(x_1) < f(x_2)$.

3) In (a, b) gilt $f(x) > x$.

4) Der Wertebereich von $f(x)$ deckt sich ganz oder zum Teil mit dem Erklärungsbereich: mit $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a+0)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b-0)$ gilt $-\infty \leq \alpha < b \leq \beta$.

Beispiele: $f(x) = e^x$ ($a = -\infty$, $\alpha = 0$, $b = \beta = +\infty$); $f(x) = x + 1$ ($a = \alpha = -\infty$, $b = \beta = +\infty$); $f(x) = e \cdot x$ ($a = \alpha = 0$, $b = \beta = +\infty$); $f(x) = \arcsin x$ ($a = \alpha = 0$, $b = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$). Ist nur die dritte Bedingung nicht erfüllt, so kann man doch für jede reelle Funktion $f(x)$, unter der Bedingung, welche sich die durch $f(x) = x$ gegebenen Ruhepunkte nicht im Endlichen auflösen, den Abschnitt (a, b) so in Teile zerlegen, daß in jedem entweder $f(x) > x$ oder $f(x) < x$ gilt; in dem letzten Falle ist dann eben $f^{[-1]}(x) > x$

⁶⁾ A. HURWITZ, Acta Math. 20 (1897), S. 285–312.

Erklärung 2. Gehört $f(x)$ zu S , dann heißt eine Funktion $\varphi(x)$ eine ABELSche Stufungsfunktion (im folgenden kurz: Stufungsfunktion) zu $f(x)$, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- 1) $\varphi(x)$ ist in (a, β) als reelle stetige Funktion erklärt;
- 2) $\varphi(x)$ ist in (a, β) eine steigende Funktion: für $a < x_1 < x_2 < \beta$ ist stets $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$;
- 3) $\varphi(x)$ erfüllt für x in (a, b) die ABELSche Gleichung (3).

Durch diese Eigenschaften ist $\varphi(x)$ bei gegebenem $f(x)$ noch nicht eindeutig bestimmt. Eine nicht wesentliche Unbestimmtheit besteht darin, daß mit jedem $\varphi(x)$ auch $\varphi(x) + C$ eine Stufungsfunktion zu $f(x)$ ist. Diese Konstante läßt sich festlegen, indem man einen Punkt x_0 in (a, b) wählt und dort $\varphi(x_0) = 0$ vorschreibt. Setzen wir weiter

$$(6) \quad f(x_0) = x_1, \quad f(x_{n-1}) = x_n = f^{[n]}(x_0),$$

so wird wegen (3)

$$(7) \quad \varphi(x_1) = 1, \quad \varphi(x_n) = n.$$

Der Abschnitt (x_0, x_1) soll Hauptabschnitt von $\varphi(x)$ heißen. Daß auch durch die Vorschrift $\varphi(x_0) = 0$ die Stufungsfunktion noch nicht eindeutig festgelegt ist, lehrt

Satz 1. *Es sei $s(t)$ eine stetige reelle Funktion, die den drei Bedingungen genügt:*

$$1) s(0) = 0; \quad 2) s(t+1) = s(t) + 1; \quad 3) s(t_1) < s(t_2) \quad \text{für } t_1 < t_2.$$

Ist dann weiter $\varphi(x)$ eine Stufungsfunktion zu der Funktion $f(x)$ aus S , so daß $\varphi(x_0) = 0$, dann ist auch $\psi(x) = s(\varphi(x))$ eine Stufungsfunktion zu $f(x)$ mit $\psi(x_0) = 0$; umgekehrt hat jede Stufungsfunktion, die bei x_0 verschwindet, die Form $s(\varphi(x))$, wobei $s(t)$ die drei obigen Bedingungen erfüllt.

Der leicht zu führende Beweis dieses schon bekannten Satzes kann hier unterdrückt werden. Die darin auftretenden Substitutionen $s(t)$ haben also die Eigenschaft, daß $s(t) - t = h(t)$ eine periodische Funktion von t mit der Periode 1 ist, welche für $t = 0$ verschwindet und niemals so rasch fällt, wie ihr Argument wächst: $h(0) = 0$, $h(t+1) = h(t)$, $h(t_2) - h(t_1) > -(t_2 - t_1) < 0$.

Aus den in der Erklärung 2 geforderten Eigenschaften einer Stufungsfunktion $\varphi(x)$ ergibt sich, daß sie eine eindeutige Umkehrung $\varphi^{[-1]}(x)$ hat, so daß sich die Zwischenfunktionen nach (4) eindeutig bilden lassen. Nur die natürlichen Stufungen und Abstufungen von $f(x)$ sind durch $f(x)$ allein bestimmt, die Zwischenfunktionen hängen noch von der Wahl der Stufungsfunktion ab. Die Aufstufungen $f^{[k]}(x)$ ($k > 0$) sind in $(a, f^{[-k]}(\beta))$ erklärt, die Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ ($k > 0$) in $(f^{[k]}(a), \beta)$.

Der Umfang des Wertebereichs der Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$,

$$\sigma_f = \lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(y) - \lim_{x \rightarrow \alpha} \varphi(x) = \limsup_{\alpha < x < y < \beta} (\varphi(y) - \varphi(x)),$$

heißt die „Stufbarkeit“ von $f(x)$; $f(x)$ ist „ σ_f -fach stufbar“. Wenn nicht zugleich die beiden Ungleichungen $\alpha < \alpha$, $b < \beta$ erfüllt sind, so ist $\sigma_f = \infty$; $f(x)$ heißt dann „voll stufbar“. Wenn $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \beta$, so heißt $f(x)$ „voll aufstufbar“ (dies ist der Fall für $b = \beta$); ist $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \alpha$, so ist $f(x)$ „voll abstufbar“ (so bei $\alpha = \alpha$). Bei endlichem σ_f sind die Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ nur für $|k| < \sigma_f$ erklärt; für voll aufstufbare $f(x)$ ist k nicht nach oben, für voll abstufbare nicht nach unten beschränkt. Ist σ_f eine ganze Zahl, so hängt sein Wert noch in geringem Maße von der Wahl der Stufungsfunktion ab.

§ 2.

Aufbau von Stufungsfunktionen für ableitbare S -Funktionen.

Ist $f(x)$ eine S -Funktion, dann kann man eine Stufungsfunktion dazu herstellen: Man wählt ein x_0 in (a, b) , bestimmt x_1 nach (6), bildet für den Hauptabschnitt $x_0 \leq x \leq x_1$ die Funktion

$$(8) \quad \varphi_0(x) = t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

und setzt sie in die angrenzenden Abschnitte (x_1, x_2) ; (x_2, x_3) ; ... und ebenso nach der anderen Seite mittels der ABELSchen Gleichung fort. Insbesondere wird für $x_{-1} \leq x \leq x_0$, d. h. für $x_0 \leq f(x) \leq x_1$

$$(9) \quad \varphi_0(x) + 1 = \varphi_0(f(x)) = \psi_0(x) = \frac{f(x) - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Diese Funktion $\varphi_0(x)$ ist dann in x_0 (und daher, weil sie ihrer Herstellung nach die ABELSche Gleichung (3) erfüllt, in allen Nachfolgern und Vorgängern von x_0 ebenfalls) stetig, genügt also allen Vorschriften der Erklärung 2.

Eine Funktion mit stetigen Ableitungen beliebiger Ordnung möge fortan als „vollableitbar“ bezeichnet werden, in Anlehnung an Ausdrücke wie „vollmonoton“, „vollkonvex“. — Alle natürlichen Stufungen $f^{[n]}(x)$ sind offenbar zugleich mit $f(x)$ selbst r -mal stetig ableitbar oder vollableitbar. Das läßt Anlaß, dieselbe Eigenschaft auch von allen Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ zu fordern; und zwar auch hinsichtlich der Stufungszahl k . Hierzu ist es offenbar hinreichend, wenn die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ dieselben Eigenschaften hat. Andererseits ist das auch notwendig, denn durch eine bestimmt gegebene Charakter solcher Zwischenfunktionen $f_k(x)$, die den Stufungsgesetzen (2) folgen, ist nach (4) auch die Stufungsfunktion bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt: setzt man $\varphi(x_0) = 0$ und löst $f^{[k]}(x_0) = x$ nach k auf: $k = \chi(x)$,

so ist $\varphi(x) = \chi(x)$ die zugehörige Stufungsfunktion. Diese Forderung läßt sich erfüllen:

Satz 2. Zu einer r -mal stetig ableitbaren (vollableitbaren) Funktion $f(x)$ aus S gibt es stets eine r -mal stetig ableitbare (vollableitbare) Stufungsfunktion $\varphi(x)$; die damit nach (4) gebildeten Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ sind ebenfalls r -mal stetig ableitbar (vollableitbar).

Ist dieser Satz bewiesen, dann folgt aus Satz 1 bei Verwendung einer ebensolchen Substitution $s(t)$, daß es unendlich viele solche Stufungsfunktionen gibt. Die gesuchte Stufungsfunktion wird nun gewonnen als Glied (für vollableitbares $f(x)$: als Grenzfunktion) einer Folge $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\dots$ $\varphi_n(x)$, $\dots$ von Stufungsfunktionen zu $f(x)$, von der das Anfangsglied durch (8) gegeben ist und in der $\varphi_n(x)$ stetige Ableitungen bis zur n -ten Ordnung hat. Nach Satz 1 gilt dann:

$$(10) \quad \varphi_n(x) = s_n(\varphi_{n-1}(x)) = S_n(\varphi_0(x)),$$

$$(10a) \quad S_0(t) = t, \quad S_n(t) = s_n(S_{n-1}(t)).$$

Dabei müssen $s_n(t)$ und $S_n(t)$ die drei Bedingungen von Satz 1 erfüllen. $s_n(t)$ muß stetige Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$ haben, und die n -te Ableitung von $s_n(t)$ muß bei $t = 0$ einen Sprung von solcher Größe haben, daß der Sprung der n -ten Ableitung von $\varphi_{n-1}(x)$ an der Stelle x_0 in $\varphi_n(x)$ gerade aufgehoben ist.

Für diese Zwecke sind die BERNOULLISCHEN Polynome geeignet; es folgt daher eine Zusammenstellung ihrer Erklärung und Eigenschaften⁷⁾. Mit den Konstanten

$$(11) \quad \beta_n = \frac{B_n}{n!}, \quad \text{so daß also} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n u^n = \frac{u}{e^u - 1},$$

werden die Funktionen $h_n(t)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ erklärt als die BERNOULLISCHEN Polynom mit dem Anfangswert 0, für $n > 1$ noch vermindert um ein Anfangsglied ihrer Fourierreihe, dessen Länge später bemessen werden soll:

$$(12) \quad h_0(t) = t,$$

$$h_{2n}(t; N) = \sum_{\lambda=1}^{2n+1} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \cdot \beta_{2n+1-\lambda} + (-1)^n \cdot \sum_{\nu=1}^N \frac{2 \sin 2\pi \nu t}{(2\pi \nu)^{2n+1}} \quad (n \geq 1)$$

$$h_{2n+1}(t; N) = \sum_{\lambda=1}^{2n+2} \frac{t^\lambda}{\lambda!} \cdot \beta_{2n+2-\lambda} + (-1)^n \cdot \sum_{\nu=1}^N \frac{2(1 - \cos 2\pi \nu t)}{(2\pi \nu)^{2n+2}} \quad (n \geq 0)$$

⁷⁾ Vgl. K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl. Berlin 1931, S. 541–542, 550–552; N. E. NÖRLUND, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924.

Setzt man weiter

$$(13) \quad C_k(N) = \beta_k - \cos \frac{k\pi}{2} \cdot \sum_{r=1}^N \frac{2}{(2\pi r)^k} \quad (k \geq 1),$$

also $C_1(N) = -\frac{1}{2}$, $C_{2n+1}(N) = 0$ ($n > 0$), dann folgt aus den bekannten Eigenschaften der BERNOULLISCHEN Funktionen:

$$(14) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} C_n(N) = 0; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} h_n(t; N) = 0 \quad \text{für } n > 1, \text{ gleichmäßig in } (0, 1).$$

Ferner ist

$$(15) \quad h_n(0; N) = 0;$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^k h_n(t; N) \Big|_{t=0} = C_{n+1-k}(N) \quad (0 < k \leq n);$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^{n+1} h_n(t; N) \Big|_{t=0} = \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t};$$

$$(16) \quad h_n(t; N) = (-1)^{n+1} h_n(1-t; N);$$

$$(17) \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^k h_n(t; N) \Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} \right)^k h_n(t; N) \Big|_{t=1} \quad (0 \leq k \neq n);$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^n h_n(t; N) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{d}{dt} \right)^n h_n(t; N) \Big|_{t=1} = +\frac{1}{2};$$

$$(18) \quad h'_n(t; N) = h_{n-1}(t; N) + C_n(N) \quad (n > 0; \text{ oder } n = 0, t \neq 0, 1, 2, \dots).$$

Aus (18) folgt durch Integration von 0 bis 1 die Ungleichung

$$|C_n(N)| \leq \max |h_{n-1}(t; N)| \quad (0 \leq t \leq 1; n > 0)$$

und damit wegen (16):

$$(19) \quad |h_n(t; N)| \leq \max |h_{n-1}(t; N)| \quad (0 \leq t \leq 1; n > 0).$$

Aus (18) folgert man weiter

$$|h'_n(t; N)| \leq \max |h_{n-1}(t; N)| \cdot \frac{3 + (-1)^n}{2};$$

weil nun aus (19) und (12) leicht

$$(20) \quad |h_n(t; N)| \leq \max |h_1(t; N)| < \frac{1}{\pi^2 \cdot N}$$

zu bestätigen ist, so findet man für die Ableitungen die Abschätzung

$$(21) \quad |h_n^{(k)}(t; N)| \leq 2^{\left[\frac{k+1}{2} \right]} \cdot \max |h_{n-k}(t; N)| \leq 2^{\left[\frac{k+1}{2} \right]} \cdot \frac{1}{\pi^2 \cdot N}.$$

Wählt man nun die in (10) auftretende Substitution $s_n(t)$ in der Gestalt

$$(22) \quad s_n(t) = t + c_n \cdot h_n(t) \quad \text{mit } h_n(t) = h_n(t; N_n) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1,$$

wobei über die beiden Größen c_n und N_n noch passend verfügt werden kann, so erfüllt dieses $s_n(t)$ nach (15) die erste Bedingung von Satz I. $\varphi_n(x)$ ist damit, wenn $\varphi_{n-1}(x)$ bereits festgelegt ist, im Hauptabschnitt $x_0 \leq x \leq x_1$

bestimmt; setzen wir $\varphi_n(x)$ in die angrenzenden Abschnitte funktional fort [das ist: mittels der ABELSchen Funktionalgleichung (3)], so ergibt sich für $s_n(t)$ dabei eine Fortsetzung nach der Gleichung $s_n(t+1) = s_n(t) + 1$, also die zweite Bedingung von Satz 1. Um auch der dritten Bedingung Genüge zu tun, muß in $\langle 0, 1 \rangle$

$$(23) \quad c_n \cdot h'_n(t; N_n) > -1$$

gelten; darauf ist bei der Wahl von c_n und N_n Rücksicht zu nehmen. Daß die Ableitungen von $s_n(t)$ bis zur Ordnung $n-1$ stetig werden, ergibt die Formel (17). Jetzt gilt es, c_n so zu bestimmen, daß auch die n -te Ableitung von $\varphi_n(x)$ stetig wird. Als Unstetigkeitsstellen kommen nur die Punkte x_0, x_1 usw. in Betracht; und ist die n -te Ableitung von $\varphi_n(x)$ an einer dieser Stellen stetig gemacht, dann ist sie vermöge der funktionalen Fortsetzung auch an allen anderen stetig, die Stetigkeit der n -ten Ableitung von $f(x)$ dabei vorausgesetzt.

Zur Abkürzung werde

$$(24) \quad \varphi_n(f(x)) = \psi_n(x) \quad \text{für } x_0 \leq f(x) \leq x_1$$

gesetzt; diese Funktion $\psi_n(x)$ ist also jedenfalls in einer linksseitigen Umgebung $\langle x_0 - \delta, x_0 \rangle$ des Punktes x_0 erklärt. Wird $\varphi_n(x)$ funktional über den Punkt x_0 nach links fortgesetzt, so entsteht dort nach (3) und (24) die Funktion $\psi_n(x) - 1$. Da ihre Werte links von x_0 nach (24) durch die Werte von $\psi_n(x)$ im Hauptabschnitt links von x_1 bestimmt sind, so schließt sie sich bei x_0 stetig an die Werte an, die $\varphi_n(x)$ im Hauptabschnitt rechts von x_0 annimmt für $x = x_0$ wird von beiden Seiten her stetig der Wert 0 angenommen. Daß auch die Ableitungen bis zur n -ten Ordnung stetig sein sollen, wird durch die Gleichungen⁸⁾

$$(25) \quad D^k \varphi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$$

gefordert. Im Falle $n = 1$ nehme man $N_1 = 0$, d. h.

$$(26) \quad h_1(t) = \frac{1}{2} (t^2 - t);$$

die Bedingung (25) ist dann durch

$$(27) \quad c_1 = 2 \frac{1 - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)}$$

zu erfüllen. Es wird dann

$$s'_1(t) = 2 \frac{1 \cdot t + f'(x_0) \cdot (1-t)}{1 + f'(x_0)},$$

⁸⁾ Die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Formeln sind zusammen gestellt in der Mitteilung des Verf. „Die Kettenregel für höhere Ableitungen“, Math. Zeitschr. 48 (1943), S. 735–746, weiterhin mit „K“ angeführt.

also $s'_1(t) > 0$ in $(0, 1)$; $s_1(t)$ erfüllt mithin auch die dritte Bedingung von Satz 1.

Angenommen jetzt, die Forderungen (25) seien für $1, 2, \dots, n-1$ an Stelle von n erfüllt. Sie lassen sich unter Beachtung von (22) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) &= \{D^k \psi_{n-1}(x_0) - D^k \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \{D_x^k h_n(\psi_{n-1}(x_0)) - D_x^k h_n(\varphi_{n-1}(x_0))\} \\ &= \{D^k \psi_{n-1}(x_0) - D^k \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \cdot \sum_{\nu=1}^k \{h_n^{(\nu)}(1) \cdot D_{k\nu} \psi_{n-1}(x_0) - h_n^{(\nu)}(0) \cdot D_{k\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}. \end{aligned}$$

Ist nun $k < n$, so verschwindet die erste Klammer nach Voraussetzung; in der zweiten (unter dem Summenzeichen) ist nach (17) für $\nu < n$ $h_n^{(\nu)}(1) = h_n^{(\nu)}(0)$, so daß übrigbleibt:

$$D^k \psi_n(x_0) - D^k \varphi_n(x_0) = c_n \cdot \sum_{\nu=1}^k h_n^{(\nu)}(0) \cdot \{D_{k\nu} \psi_{n-1}(x_0) - D_{k\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}.$$

Die in den Klammern rechter Hand stehenden Differentialausdrücke vom Grade ν und der Ordnung k sind Produktsummen aus den Ableitungen erster bis $(k+1-\nu)$ -ter Ordnung von ψ_{n-1} und φ_{n-1} , wobei $k+1-\nu \leq k \leq n-1$ ist; diese stimmen an der Stelle x_0 nach Voraussetzung für die beiden Funktionen überein, so daß jede Klammer und damit die ganze rechte Seite verschwindet. Mithin ist $\varphi_n(x)$ bei funktionaler Fortsetzung samt seinen Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ stetig, und es bleibt nur noch der Fall $k=n$ zu untersuchen.

Die Stetigkeit der n -ten Ableitung läßt sich im allgemeinen nur durch bestimmte Wahl von c_n erreichen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} D^n \psi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \psi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \cdot \sum_{\nu=1}^n \{h_n^{(\nu)}(1) \cdot D_{n\nu} \psi_{n-1}(x_0) - h_n^{(\nu)}(0) \cdot D_{n\nu} \varphi_{n-1}(x_0)\}. \end{aligned}$$

In der Summe ist für $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ nach (17) $h_n^{(\nu)}(1) = h_n^{(\nu)}(0)$, hingegen für $\nu = n$ $h_n^{(n)}(1) = +\frac{1}{2}$, $h_n^{(n)}(0) = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} D^n \psi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \psi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &\quad + c_n \cdot \left\{ \frac{1}{2} (D_{nn} \psi_{n-1}(x_0) + D_{nn} \varphi_{n-1}(x_0)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{n-1} h_n^{(\nu)}(0) \cdot (D_{n\nu} \psi_{n-1}(x_0) - D_{n\nu} \varphi_{n-1}(x_0)) \right\}. \end{aligned}$$

Weil nun in D_n , nur die Ableitungen bis zur Ordnung $n + 1 - v$ auftreten, ist hierin nach Voraussetzung für $2 \leq v \leq n$ $D_{n,v} \varphi_{n-1}(x) = D_{n,v} \varphi'_{n-1}(x)$. Übrig bleibt daher

$$\begin{aligned} D^n \varphi_n(x_0) - D^n \varphi_n(x_0) &= \{D^n \varphi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + \\ &+ c_n \cdot \{D_{n,n} \varphi_{n-1}(x_0) + h'_n(0) \cdot (D_{n,1} \varphi_{n-1}(x_0) - D_{n,1} \varphi_{n-1}(x_0))\} \\ &= \{1 + c_n \cdot C_n(N_n)\} \{D^n \varphi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} + c_n \cdot (\varphi'_{n-1}(x_0))^n. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck soll verschwinden; dazu muß man c_n den Wert erteilen

$$(28a) \quad c_n = - \{D^n \varphi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi'_{n-1}(x_0)\} : \{(\varphi'_{n-1}(x_0))^n + C_n(N_n) \cdot (D^n \varphi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0))\}.$$

Wenn nicht schon zufällig $D^n \varphi_{n-1} = D^n \varphi'_{n-1}$ ist und daher $c_n = 0$ wird, so läßt sich dafür eine schönere Form finden:

$$(28b) \quad \frac{1}{c_n} + C_n(N_n) + (\varphi'_{n-1}(x_0))^n : \{D^n \varphi_{n-1}(x_0) - D^n \varphi_{n-1}(x_0)\} = 0.$$

c_n hängt hiernach zwar noch von N_n ab, strebt aber bei wachsendem N_n wegen (14) und wegen $\varphi'_{n-1}(x) > 0$ gegen einen endlichen Grenzwert. Man kann in dieser Formel für c_n noch den Einfluß der zu stufenden Funktion $f(x)$ von dem der bisher aufgebauten Substitution $S_{n-1}(t)$ trennen. Nach (10) und (24) ist

$$D^n \varphi_k(x_0) - D^n \varphi_k(x_0) = \sum_{r=1}^n \{D^r S_k(1) \cdot D_{n,r} \varphi_0(x_0) - D^r S_k(0) \cdot D_{n,r} \varphi_0(x_0)\}.$$

Nun folgt aus (8)

$$D_{n,v} \varphi_0(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 < v < n; \quad = (x_1 - x_0)^{-n} \quad \text{für } v = n,$$

und nach (8) und (24) wird

$$D_{n,v} \varphi_0(x_0) = \sum_{\mu=v}^n D_{n,\mu} f(x_0) \cdot D_{\mu,v} \varphi_0(x_1) = (x_1 - x_0)^{-v} \cdot D_{n,v} f(x_0);$$

schreibt man also zur Abkürzung

$$(29) \quad f_{n,v} = (x_1 - x_0)^{n-v} \cdot D_{n,v} f(x_0),$$

so nimmt (28b) diese Gestalt an:

$$(28c) \quad c_n = -1 : \{C_n(N_n) + (S'_{n-1}(0))^n : (\sum_{r=1}^n f_{n,r} D^r S_{n-1}(1) - D^n S_{n-1}(0))\}.$$

Wird c_n gemäß der Bedingung (28) gewählt, so ist die n -te Ableitung von $\varphi_n(x)$ überall stetig; damit außerdem $\varphi_n(x)$ stets zunehme bei wachsendem x , ist die Bedingung (23) einzuhalten. Wegen (18) und (14) kann man dafür durch Wahl eines hinreichend großen N_n sorgen, weil dann die linke Seite von (23) beliebig nahe an Null herankommt. Die Abhängigkeit des c_n von N_n

kann dabei nur verzögernd, aber nicht hindernd wirken, da c_n bei wachsendem N_n beschränkt bleibt.

So ist jetzt im Hauptabschnitt (x_0, x_1) eine Folge von Stufungsfunktionen $\varphi_n(x)$ erklärt, die darüber hinaus nach der ABELSchen Gleichung fortzusetzen sind; $\varphi_n(x)$ ist samt seinen Ableitungen bis zur n -ten Ordnung stetig. Wenn $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung r hat, so läßt sich diese Folge der $\varphi_n(x)$ bis zum Gliede mit $n = r$ aufbauen. Für endlich-oft stetig ableitbare Funktionen $f(x)$ ist der Satz 2 damit bewiesen.

§ 3.

Die Konvergenz bei vollableitbaren S-Funktionen.

Um für vollableitbare Funktionen $f(x)$ eine Stufungsfunktion mit der gleichen Eigenschaft zu erhalten, genügt es nicht, nur die Konvergenz der vorhin aufgebauten Folge $\{\varphi_n(x)\}$ zu zeigen, sondern man muß nachweisen, daß diese Grenzfunktion wachsend und vollableitbar ist; das ist jedenfalls dann der Fall, wenn für beliebiges k die Folge der Ableitungen $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ gleichmäßig konvergiert und die Ableitungen $\varphi_n'(x)$ einen positiven Grenzwert haben. Diese Anforderungen kann man in der Weise erfüllen, daß man eine konvergente Folge positiver Zahlen ε_n annimmt:

$$(30) \quad \varepsilon_n > 0; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

und dann die Zahlen N_n so groß wählt, daß außer der Ungleichung (23) auch die Ungleichung

$$(31) \quad N_n > \frac{c_n}{\varepsilon_n}, \quad \text{also} \quad \frac{c_n}{N_n} < \varepsilon_n$$

besteht; das ist wiederum trotz der Abhängigkeit des c_n von N_n möglich, weil c_n bei wachsendem N_n nicht unbeschränkt zunimmt.

Zunächst ist unter diesen Voraussetzungen die Folge φ_n konvergent: denn

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{v=1}^n (\varphi_v(x) - \varphi_{v-1}(x)) = \varphi_0(x) + \sum_{v=1}^n c_v h_v(\varphi_{v-1}(x)),$$

und da die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ wegen (20), (31) und (30) gleichmäßig beschränkt ist, so ist die Grenzfunktion $\Phi(x)$ vorhanden:

$$(32) \quad \Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{v=1}^{\infty} c_v h_v(\varphi_{v-1}(x)).$$

Auch die Folge der ersten Ableitungen konvergiert: Es ist

$$\varphi_n'(x) = \varphi_0'(x) \cdot \prod_{v=1}^n s_v'(\varphi_{v-1}(x)) = \varphi_0'(x) \cdot \prod_{v=1}^n \{1 + c_v h_v'(\varphi_{v-1}(x))\},$$

und dieses Produkt konvergiert für $n \rightarrow \infty$ absolut und gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$, weil es die Summe

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v \cdot h'_v(\varphi_{v-1}(x))$$

nach (21), (31), (30) tut. Für die Ableitung der Grenzfunktion erhält man also den Ausdruck

$$\Phi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(x) = \varphi'_0(x) \cdot \prod_{v=1}^{\infty} \{1 + c_v h'_v(\varphi_{v-1}(x))\}.$$

Wenn

$$(33) \quad \prod_{v=1}^{\infty} (1 + |c_v|) \cdot \max_{0 < t < 1} |h'_v(t)| = A$$

gesetzt wird, so ist für alle n und für t in $\langle 0, 1 \rangle$

$$(34) \quad 0 < S'_n(t) < A < \infty.$$

Wegen der Konvergenz des Produktes ist der Grenzwert $\Phi'(x)$ von Null verschieden, und zwar positiv als Grenzwert der positiven Größen $\varphi'_n(x)$. $\Phi(x)$ ist also eine wachsende Funktion.

Es bleibt noch die Konvergenz der höheren Ableitungen zu untersuchen. Die k -te Ableitung von φ_n ist

$$D^k \varphi_n(x) = D_x^k S_n(\varphi_0(x)) = \sum_{\lambda=1}^k D^\lambda S_n(\varphi_0(x)) \cdot D_{k\lambda} \varphi_0(x);$$

weil nun $\varphi_0(x)$ linear in x ist, so zieht sich die Summe auf das Glied mit $\lambda = k$ zusammen:

$$D^k \varphi_n(x) = D_{kk} \varphi_0(x) \cdot D^k S_n(t),$$

und zu prüfen ist, ob der zweite Faktor für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $\langle 0, 1 \rangle$ konvergiert. Nun ist wegen (10a)

$$(35) \quad D^k S_n(t) = \sum_{(\lambda)} D_{\lambda_0 \lambda_1} s_1 \cdot D_{\lambda_1 \lambda_2} s_2 \cdot \dots \cdot D_{\lambda_{n-1} \lambda_n} s_n,$$

zu erstrecken über alle $\binom{n+k-2}{k-1}$ verschiedenen Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, welche mit den Ungleichungen

$$k = \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n = 1$$

verträglich sind. Demnach ist auch

$$(36) \quad |D^k S_n| \leq \sum_{(\lambda)} |D_{\lambda_0 \lambda_1} s_1| \cdot \dots \cdot |D_{\lambda_{n-1} \lambda_n} s_n|.$$

Hierin bedeutet nach der Formel von FAA DI BRUNO

$$D_{\mu\nu} s = \sum_{(\eta)} \mu! \frac{1}{\eta_1!} (s')^{\eta_1} \cdot \frac{1}{\eta_2!} \left(\frac{s''}{2!}\right)^{\eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_3!} \left(\frac{s'''}{3!}\right)^{\eta_3} \dots,$$

zu erstrecken über alle Zusammenstellungen $(\eta) = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ aus ganzen nichtnegativen Zahlen, für welche die beiden Bedingungen erfüllt sind

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots = \nu; \quad 1 \eta_1 + 2 \eta_2 + 3 \eta_3 + \dots = \mu.$$

Mit $D_{\mu\nu}^* s$ werde nun der Ausdruck bezeichnet, den man aus $D_{\mu\nu} s$ erhält, wenn man in dieser Darstellung die erste Ableitung s' durch 1, alle höheren Ableitungen durch ihren Betrag ersetzt. Es ist also

$$(37) \quad D_{\mu\nu}^* s = \sum_{(\eta)} \mu! \cdot \frac{1}{\eta_1!} \cdot \frac{1}{\eta_2!} \left(\frac{1}{2!} |s''| \right)^{\eta_2} \cdot \frac{1}{\eta_3!} \left(\frac{1}{3!} |s'''| \right)^{\eta_3} \dots,$$

worin die Summe über dieselben Zusammenstellungen (η) auszudehnen ist. Dann gilt offenbar die Abschätzung

$$|D_{\lambda_{v-1}\lambda_v} s_v| \leq (1 + |c_v h_v(t)|)^k \cdot D_{\lambda_{v-1}\lambda_v}^* s_v.$$

Hier ist der zweite Faktor nur dann von 1 verschieden, wenn $\lambda_{v-1} > \lambda_v$. Bei einer bestimmten Zusammenstellung (λ) ist das höchstens $(k-1)$ -mal der Fall; die betreffenden Faktoren dieses Gliedes in (35) seien $\dots D_{\alpha\beta} s_\mu \dots D_{\beta\gamma} s_\nu \dots$, wobei $\dots < \mu < \nu < \dots$ und $\dots > \alpha > \beta > \gamma > \dots$ sein muß. Das entsprechende Glied auf der rechten Seite von (36) läßt sich dann abschätzen durch

$$|D_{\lambda_0\lambda_1} s_1| \dots |D_{\lambda_{n-1}\lambda_n} s_n| \leq \prod_{v=1}^n (1 + |c_v h_v|)^k \{ \dots D_{\alpha\beta}^* s_\mu \cdot D_{\beta\gamma}^* s_\nu \dots \}.$$

Dieselbe Zeigerfolge $(n, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots, 1)$ kommt nun in (36) mit allen möglichen Folgen $(\dots, \mu, \nu, \dots)$ vor, für welche die Ungleichungen gelten $(1 \leq) \dots < \mu < \nu < \dots (\leq n)$. Berücksichtigt man noch alle (der Anzahl nach 2^{k-2}) verschiedenen Zeigerfolgen $(\dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots)$, so erhält man sämtliche Glieder von (36). Mithin fließt aus (36) die Abschätzung

$$|D^k S_n| \leq \prod_{v=1}^n (1 + |c_v h_v|)^k \cdot \sum_{\dots \alpha, \beta \dots} \dots \sum_{\dots \mu < \nu \dots} \{ \dots D_{\alpha\beta}^* s_\mu \cdot D_{\beta\gamma}^* s_\nu \dots \}.$$

Die rechte Seite wird weiter vergrößert, wenn man die einschränkenden Bedingungen $\dots < \mu < \nu < \dots$ fallen läßt; dann kann jeder Faktor für sich summiert werden. In Verbindung mit (34) folgt nun

$$(38) \quad |D^k \varphi_n(x)| \leq A^k \cdot \sum_{\dots \alpha, \beta \dots} \dots \left(\sum_{\nu} D_{\alpha\beta}^* s_\nu \right) \left(\sum_{\gamma} D_{\beta\gamma}^* s_\nu \right) \dots$$

Der Faktor von A^k ist eine Summe von 2^{k-2} Produkten aus je höchstens $k-1$ Faktoren der Form $\sum_{\nu} D_{\alpha\beta}^* s_\nu$; wenn bei $n \rightarrow \infty$ diese Faktoren konvergieren, dann auch die linke Seite von (38). Und da zufolge (21), (30), (31) eine Summe wie

$$\sum_{\nu} |s_\nu^{(m)}(q_{v-1}(x))|$$

für $m > 1$ gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$ konvergent ist, so gilt das erst recht für eine Summe über Produkte von höheren Ableitungen der s , wie sie die Faktoren $\sum D_{\alpha\beta}^* s_\nu$ in (38) nach (37) darstellen.

Die Folge der k -ten Ableitungen $D^k \varphi_n(x)$ konvergiert also absolut und gleichmäßig in $\langle x_0, x_1 \rangle$, strebt mithin gegen die (hiernach vorhandene) k -te Ableitung der Grenzfunktion $\Phi(x)$: d. h. $\Phi(x)$ ist vollableitbar. Da alle $\varphi_n(x)$ die ABELSche Gleichung (3) erfüllen, so trifft sie auch für $\Phi(x)$ zu. $\Phi(x)$ ist also eine vollableitbare Stufungsfunktion für das (dabei gleichfalls vollableitbar vorausgesetzte) $f(x)$; ihre Werte sind aus denen im Hauptabschnitt nach einer der Formeln

$$\varphi(f^{[m]}(x)) = \varphi(x) \text{ für alle ganzen } m \text{ und } x_0 \leq x \leq x_1,$$

oder anders geschrieben:

$$\varphi(x) = m + \varphi(f^{[-m]}(x)) \text{ für alle ganzen } m \text{ und } x_m \leq x \leq x_{m+1}$$

zu berechnen. Satz 2 ist damit vollständig bewiesen. Von dieser Funktion $\varphi(x)$ kann man nach Satz 1 mit einer gleichfalls vollableitbaren Substitution $s(t)$ zu jeder anderen vollableitbaren Stufungsfunktion für $f(x)$ gelangen.

§ 4.

Die Ableitungen der Zwischenfunktionen, ausgedrückt durch die Ableitungen der Stufungsfunktion.

Es sei $\varphi(x)$ eine mehrfach ableitbare Stufungsfunktion zu $f(x)$. Die Zwischenfunktion k -ter Stufe $f^{[k]}(x)$ ist dann durch (4) erklärt; diese Beziehung läßt sich zerlegen in

$$y = f^{[k]}(x); \quad y = \varphi^{[-1]}(z); \quad z = k + u; \quad u = \varphi(x).$$

Die n -te Ableitung von $f^{[k]}(x)$ wird, falls vorhanden, gegeben durch

$$(39) \quad D^n f^{[k]}(x) = \sum_{\nu=1}^n \varphi^{[-1]^{(\nu)}}(z) \cdot D_{n\nu} \varphi(x).$$

Von den beiden Funktionen $\varphi^{[-1]}$ und φ , deren Ableitungen rechts vorkommen, läßt sich die zweite entbehren. Dazu wende man auf die Identität $x = \varphi^{[-1]}(\varphi(x))$ die Operatoren $D_{n\lambda}$ an ($\lambda = 1, 2, \dots, n$):

$$0 = \sum_{\nu=\lambda}^n D_{n\nu} \varphi(x) \cdot D_{\nu\lambda} \varphi^{[-1]}(u) \quad (\lambda = 1, \dots, n-1);$$

$$1 = D_{nn} \varphi(x) \cdot D_{nn} \varphi^{[-1]}(u).$$

Mit (39) sind das $n + 1$ Gleichungen für die n Größen $D_n, \varphi(x)$, und die Determinante verschwindet daher. Daraus folgt⁹⁾

$$D^n f^{[k]}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (\varphi^{[-1]'}(u))^{-\binom{n+1}{2}} \cdot \text{Det } |A_{ik}| \quad (i, k = 0, \dots, n-1)$$

mit den Elementen

$$A_{ik} = D_{i+1,1} \varphi^{[-1]}(z) \quad \text{für } k = 0; \quad A_{ik} = D_{i+1,k} \varphi^{[-1]}(u) \\ \text{für } 1 \leq k \leq i+1; \quad A_{ik} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leq n-1.$$

Die Spalten $k = 2, \dots, n-1$ dieser Determinante lassen sich durch geeignete Linearkombinationen in Spalten mit Ableitungsoperatoren nur ersten Grades überführen¹⁰⁾, so daß man erhält

$$(40a) \quad D^n f^{[k]}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!} \cdot (\varphi^{[-1]'}(u))^{-2n+1} \cdot \text{Det } |C_{ik}^{(n)}| \quad (i, k = 0, \dots, n-1),$$

wobei die Elemente dieser Determinante sind

$$(40b) \quad C_{ik}^{(n)} = D^{i+1} \varphi^{[-1]}(z) \quad \text{für } k = 0; \quad C_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leq n-1; \\ C_{ik}^{(n)} = \alpha_{ik}^{(n)} \cdot D^{i-k+2} \varphi^{[-1]}(u) \quad \text{für } 1 \leq k \leq i+1$$

mit

$$(40c) \quad \alpha_{ik}^{(n)} = 1 \quad \text{für } k = 1; \quad \alpha_{ik}^{(n)} = n \cdot \binom{i}{k-1} - \binom{i+1}{k-1} \quad \text{für } 2 \leq k \leq i+1.$$

Es ist ebensowohl möglich, in (39) $\varphi^{[-1]}(x)$ zugunsten von $\varphi(x)$ auszuscheiden. Eine solche nur die Ableitungen von $\varphi(x)$ enthaltende Darstellung in Determinantenform läßt sich erhalten, indem man die Operatoren $D_{\lambda 1}$ auf die Gleichung $y = \varphi^{[-1]}(\varphi(y))$ anwendet:

$$1 = \varphi^{[-1]'}(z) \cdot \varphi'(y);$$

$$0' = \sum_{v=1}^i \varphi^{[-1]^{(v)}}(z) \cdot D_{i v} \varphi(y) \quad (\lambda = 2, \dots, n).$$

Es kommt dann heraus

$$(41a) \quad D^n f^{[k]}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (\varphi'(y))^{-\binom{n+1}{2}} \cdot \text{Det } |B_{ik}^{(n)}| \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

mit

$$(41b) \quad B_{ik}^{(n)} = D_{i+1,k} \varphi(y) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq i+1; \\ B_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+1 < k \leq n; \quad B_{ik}^{(n)} = D_{n k} \varphi(x) \quad \text{für } i = n.$$

Diese Determinante läßt sich jedoch nicht weiter vereinfachen.

⁹⁾ Diese Darstellung ist in anderer Bezeichnung schon öfters angegeben worden, z. B. von F. G. TEIXEIRA, Giorn. mat. Battaglini 18 (1880), S. 301–309.

¹⁰⁾ Nach Fortlassung der in der obersten Zeile stehenden Nullen stimmen diese Spalten völlig mit denen der Determinante in K (15) überein; es lassen sich also hier dieselben Umformungen anwenden, die dort zur Determinante (19) führen.

§ 5.

Zur Stufung vollmonotoner Funktionen.

Eine Funktion $g(x)$ pflegt „ r -fach monoton“ bzw. „vollmonoton“ genannt zu werden, wenn das Vorzeichen ihrer Ableitungen für $n = 1, 2, \dots, r$ bzw. für alle $n = 1, 2, \dots$ durch die Ungleichungen $(-1)^n \cdot D^n g(x) > 0$ bestimmt ist. Im folgenden handelt es sich um Funktionen, deren Ableitungen positiv sind und $(r-1)$ -fach bzw. vollmonoton. Dafür eine kurze Bezeichnung:

Erklärung 3. Eine Funktion $f(x)$ heißt „ r -fach monoton steigend“ bzw. „vollmonoton steigend“, wenn sie r -mal stetig ableitbar bzw. vollableitbar ist und für $n = 1, \dots, r$ bzw. für alle $n = 1, 2, \dots$ gilt $(-1)^n \cdot D^n f(x) < 0$.

Über solche Funktionen gilt

Satz 3. Sind $f(x)$ und $g(x)$ r -fach (bzw. voll-) monoton steigende Funktionen, so trifft dies auch für $h(x) = f(g(x))$ zu.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Formel $D^n h(x) = \sum_{v=1}^n D^v f(g) \cdot D_{n,v} g(x)$, weil nach der Voraussetzung $D^v f(g)$ das Zeichen $(-1)^{v-1}$ und $D_{n,v} g(x)$ das Zeichen $(-1)^{n-v}$ hat (man beachte die Formel von BRUNO!). — Aus Satz 3 fließt sogleich

Satz 4. Ist $g(x)$ eine r -fach (bzw. voll-) monoton steigende Funktion, dann sind es auch alle natürlichen Stufungen von $g(x)$.

Aus dieser Feststellung entspringt nun die Forderung, daß auch alle Zwischenfunktionen positiver Stufe, also alle „Aufstufungen“ von $g(x)$, ebenso wie $g(x)$ selbst r -fach monoton oder vollmonoton steigen sollen. Nun hat man ferner¹¹⁾

Satz 5. Ist $g(x)$ r -fach (bzw. voll-) monoton steigend, so sind die Ableitungen von $g^{[-1]}(x)$ bis zur Ordnung r (bzw. jeder Ordnung) positiv.

Um auch bei unendlichem Grundabschnitt ($b = +\infty$) nicht zur dritten Eigenschaft einer S -Funktion (Erkl. 1) in Widerspruch zu geraten, sei im folgenden angenommen, daß $g(x)$ r -fach (oder voll-) monoton steige und daß $g^{[-1]}(x)$ zur Klasse S gehöre, also $g(x) < x$ sei. Welche besonderen Eigenschaften muß dann die Stufungsfunktion $q(x)$ zu $g^{[-1]}(x)$ aufweisen, damit die obige Forderung erfüllt werde? Aus Formel (41) läßt sich sofort antworten:

¹¹⁾ Der Beweis läßt sich, ähnlich wie oben der für Satz 3, mit der Formel K (21) führen.

Satz 6. $f(x)$ gehöre zu S , $f^{[-1]}(x)$ steige vollmonoton, $\varphi(x)$ sei eine vollmonotone Stufungsfunktion zu $f(x)$. Damit dann die durch diese Stufungsfunktion zu bildenden Aufstufungen von $f^{[-1]}(x)$, das sind die Zwischenfunktionen $f^{[k]}(x)$ mit $k < 0$, gleichfalls vollmonoton steigen, ist es notwendig und hinreichend, daß $\varphi(x)$ die Bedingungen

$$\text{Det } |B_{ik}^{(n)}| > 0 \quad (i, k = 1, \dots, n) \quad \text{für alle Paare } (x, y) \text{ mit } x > y$$

für $n = 2, 3, \dots$ erfülle. — Ersetzt man „vollmonoton“ durch „ r -fach monoton“, so sind diese Bedingungen nur für $n = 2, 3, \dots, r$ zu stellen.

Hier werden also die Ableitungen der Stufungsfunktion an zwei Stellen x und $y = f^{[k]}(x)$ miteinander verknüpft. Doch vermag man diese Bedingungen so umzugestalten, daß nur die Ableitungen an einer Stelle darin auftreten. Für $x = y$ verschwindet die Determinante, weil die beiden letzten Zeilen dann übereinstimmen. Zieht man nun von der letzten Zeile die vorletzte ab, teilt durch die positive Größe $x - y$ und geht zur Grenze $x \rightarrow y$ über, so entsteht in der letzten Zeile die Ableitung der vorletzten. Der Wert dieser neuen Determinante kann als Grenzwert positiver Werte nicht negativ sein; daher muß die Stufungsfunktion notwendig die Ungleichungen

$$(42) \quad \text{Det } |E_{ik}^{(n)}| \geq 0 \quad (i, k = 1, \dots, n; n = 2, 3, \dots)$$

mit

$$E_{ik}^{(n)} = D_{i+1, k} \varphi(x) \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq i+1;$$

$$E_{ik}^{(n)} = 0 \quad \text{für } i+2 \leq k \leq n; \quad E_{ik}^{(n)} = D(D_{n, k} \varphi(x)) \quad \text{für } i = n$$

befriedigen. Diese Determinanten lassen sich aber noch vereinfachen. Für jede genügend oft ableitbare Funktion $\varphi(x)$ gilt ¹²⁾

$$(43) \quad D_{i+1, k} \varphi = \sum_{\lambda=k}^{i+1} D_{\lambda-1, k-1} \varphi \cdot \binom{i}{\lambda-1} D_{i-\lambda+2, 1} \varphi \quad (i+1 \geq k > 1).$$

Nun ist $\binom{i}{\lambda-1} = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$, wenn $\lambda > i+1$. Die Formel (43) kann also für alle Fälle mit $1 \leq i \leq n-1, 2 \leq k \leq n$ angewandt werden. Für $i = n$ bringe man das letzte Glied ($\lambda = i+1 = n+1$) mit auf die linke Seite und hat dann für $i = n, 2 \leq k \leq n$:

$$(44) \quad D(D_{n, k} \varphi) = D_{n+1, k} \varphi - D_{n, k-1} \varphi \cdot D_{11} \varphi \\ = \sum_{\lambda=k}^n D_{\lambda-1, k-1} \varphi \cdot \binom{n}{\lambda-1} D_{n-\lambda+2, 1} \varphi.$$

Erklärt man jetzt

$$F_{ik} = \binom{i}{k-1} D^{i-k+2} \varphi(x),$$

¹²⁾ Folgt aus K(13), wenn dort k, α, n, ν durch $i+1, \lambda-1, k, 1$ ersetzt werden.

so lassen sich nach (43) und (44) alle Elemente von (42) aus diesen neueren Größen zusammensetzen nach der Formel¹³⁾

$$E_{ik}^{(n)} = \sum_{\lambda=1}^n D_{\lambda-1, k-1} \varphi(x) \cdot F_{i\lambda} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Da in dieser Summe der erste Faktor nicht von der Zeilennummer i abhängt, so sind die Spalten $E_{ik}^{(n)}$ linear aus den Spalten $F_{i\lambda}$ zusammengesetzt. Nach Unterdrückung einer Potenz des stets positiven Faktors $\varphi'(x)$ bleibt an Stelle von (42) als notwendige Bedingung, daß $\text{Det } |F_{ik}| \geq 0$ sein muß. Das ist

Satz 7. $f(x)$ gehöre zu S ; $f^{[-1]}(x)$ steige vollmonoton. Wenn auch alle Abstufungen von $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigen sollen, so muß die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$ die Bedingungen erfüllen

$$(45) \quad \text{Det} \left| \binom{i}{k-1} \cdot D^{i-k+2} \varphi(x) \right| \geq 0 \quad (i, k = 1, \dots, n; \quad n = 2, 3, \dots).$$

Im Falle r -fach monotonen Steigens ist (45) nur für $n = 2, \dots, r$ zu fordern. — Ob das Gleichheitszeichen wirklich eintreten kann, ist noch nicht ausgemacht. Läßt man es aber fort, so erhält man eine hinreichende Bedingung:

Satz 8. $f(x)$ sei eine S -Funktion. Die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$ erfülle die Bedingungen

$$(46) \quad \text{Det} \left| \binom{i}{k-1} D^{i-k+2} \varphi(x) \right| > 0 \quad (i, k = 1, \dots, n; \quad n = 2, 3, \dots).$$

Dann steigen alle Abstufungen von $f(x)$ vollmonoton.

Beweis. Es sei $\langle c, d \rangle$ ein abgeschlossener Teilabschnitt des Grundabschnitts $\langle a, \beta \rangle$, in welchem $\varphi(x)$ erklärt ist, und $N (> 1)$ eine ganze Zahl. Sind die Ungleichungen erfüllt, so sind für $x = y$, x in $\langle c, d \rangle$ alle Ableitungen der $\text{Det } |B_{ik}^{(n)}|$ von Satz 6 positiv: $\frac{\partial}{\partial x} \text{Det } |B_{ik}^{(n)}| (y, x) |_{x=y} > 0$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, so daß diese Ungleichungen für $n \leq N$ auch noch für $c \leq y \leq x \leq d$, $0 \leq x - y \leq \varepsilon$ erfüllt sind. Da nun $\text{Det } |B_{ik}^{(n)}| (y, y) = 0$, so folgt $\text{Det } |B_{ik}^{(n)}| (y, x) > 0$ für $c \leq y < x \leq y + \varepsilon \leq d$, $n \leq N$. Nach Satz 6 sind dann für $0 < k \leq \varepsilon$, $f^{[k]}(c) \leq x \leq d$ die Zwischenfunktionen $f^{[-k]}(x)$ N -fach monoton steigend. Aus Satz 3 in Verbindung mit dem ersten der Stufungsgesetze (2) ergibt sich weiter, daß alle im Abschnitt $\langle c, d \rangle$ zu bildenden Abstufungen von $f(x)$ N -fach monoton steigen, d. h. alle $f^{[-k]}(x)$ mit $0 < k < \varphi(d) - \varphi(c)$. In dieser Feststellung kommt die Zahl N nicht mehr vor (in der vorhergehenden noch, weil ε im

¹³⁾ Dabei ist zu bedenken, daß nach K (7) $D_{00}\varphi = 1$; $D_{10}\varphi = D_{20}\varphi = \dots = 0$.

allgemeinen von N abhängen wird); sie gilt also für jedes N , und das bedeutet Vollmonotonie: $f^{[-k]}(x)$ steigt vollmonoton für $0 < k < \varphi(d) - \varphi(c)$, $f^{[k]}(c) \leq x \leq d$. Nun kann der Teilabschnitt $\langle c, d \rangle$ innerhalb von (a, β) beliebig groß gewählt werden, so daß in der letzten Behauptung (a, β) an Stelle von $\langle c, d \rangle$ gesetzt werden darf. Somit ist festgestellt: $f^{[-k]}(x)$ steigt vollmonoton für $0 < k < \sigma_f$, $f^{[k]}(a) < x < \beta$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

In Satz 6 ist die Voraussetzung, daß $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigen solle, offenbar notwendig, damit $\varphi(x)$ den dort angegebenen Ungleichungen genügen kann. Es ist anzunehmen, daß diese Voraussetzung auch ausreichend ist, daß also folgende Vermutung wahr ist:

Vermutung 1. Wenn $f(x)$ zu S gehört und $f^{[-1]}(x)$ vollmonoton steigt, so gibt es genau eine Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x)$, welche die Ungleichungen von Satz 6 (bzw. Satz 8) erfüllt.

Gleichbedeutend damit ist die zweite Vermutung, die zunächst weniger zu besagen scheint¹⁴⁾:

Vermutung 2. Steigt $g(x)$ vollmonoton, dann gibt es genau eine vollmonoton steigende Funktion $h(x)$, so daß $h^{[2]}(x) = h(h(x)) = g(x)$.

Daß V. 2 aus V. 1 folgt, ist klar. Umgekehrt: Nach Wahl des Nullpunktes x_0 für die Stufungsfunktion $\varphi(x)$ zu $f(x) = g^{[-1]}(x)$ sind alle Abszissen x_n zu den Ordinaten $\varphi(x_n) = n$ festgelegt. Trifft nun die Vermutung 2 zu, so sind auch durch $x_{n-0,5} = h(x_n)$ die Abszissen zu den Ordinaten $n - 0,5 = \varphi(x_{n-0,5})$ eindeutig festgelegt, also insgesamt alle Abszissen zu den Ordinaten $\varphi(x) = m \cdot 2^{-1}$, wo m irgendeine ganze Zahl ist. Bildet man jetzt nach Vermutung 2 die durch $h_2(h_2(x)) = h(x)$, also $h_2^{[4]}(x) = g(x)$ bestimmte vollmonoton steigende Funktion $h_2(x)$, so lassen sich durch diese weiter die Abszissen zu allen Ordinaten $m \cdot 2^{-2}$ berechnen. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich, daß die Abszissen zu allen Ordinaten $m \cdot 2^{-n}$ festliegen. Da nun diese Dualbrüche überall dicht liegen, so ist $\varphi(x)$ wegen seiner Stetigkeit überall erklärt und hat dabei die Eigenschaft, daß die daraus zu bildenden Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ jedenfalls für $k = m \cdot 2^{-n}$ (m, n natürliche Zahlen) vollmonoton steigen. Weil aber $f^{[-k]}(x)$ zufolge (4) auch in k stetig ist, so kommt diese gewünschte Eigenschaft allen Abstufungen $f^{[-k]}(x)$ mit $k > 0$ zu. Es genügt also, nach Vermutung 2 eine Funktion $g(x)$ eindeutig vollmonoton zur Hälfte stufen zu können, damit es zu $g^{[-1]}(x)$ eine Stufungsfunktion gibt, die den Bedingungen

¹⁴⁾ Für die Funktion $g(x) = \log \text{nat } x$, auf welche die Voraussetzung der Vermutung 2 zutrifft, haben Herr Prof. MEIDELL und Herr Dr. GOTAAS (Oslo) eine sechsstellige Tafel der Funktion $g^{[0,5]}(x) = \text{hln } x$ („Halblogarithmus“) auf Grund dieser Monotonieforderungen berechnet.

von Satz 7 (bzw. Satz 8) genügt — und umgekehrt. Da vollmonotone Funktionen analytisch sind ¹⁵⁾, so ergäbe sich dann auch eine ausgezeichnete analytische Stufungsfunktion. Ob es allgemein zu reellen analytischen S -Funktionen jeweils eine ausgezeichnete analytische Stufungsfunktion gibt, entsprechend den „Hauptlösungen“ der linearen Differenzengleichungen, ist wohl noch nicht entschieden — an sich lassen sich nach Satz 1 aus einer analytischen Stufungsfunktion unendlich viele herstellen, wenn nur die Substitution $s(t)$ analytisch ist.

¹⁵⁾ G. GRÜSS, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 732—741.

(Eingegangen am 28. Mai 1943.)

Atlas typischer Nebelkammerbilder

mit Einführung in die Wilsonsche Methode

Von

Dozent Dr. W. Gentner Dr. H. Maier-Leibnitz
Professor Dr. W. Bothe

(Institut für Physik im Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, Heidelberg)

Mit 18 Figuren und 125 Aufnahmen. V, 125 Seiten. 1940

RM 21.60

Inhaltsübersicht:

Erster Teil: **Die Wilsonsche Nebelkammer.** Vorgeschichte der Wilsonkammer. — Theoretische Grundlagen. — Die Sichtbarmachung von Teilchenbahnen mit der Nebelkammer. — Weitere Entwicklung der Nebelkammertechnik. — Anhang: Allgemeines über Strahlenarten. — Literaturverzeichnis.

Zweiter Teil: **Nebelkammerbilder.** α -Strahlen. — β -Strahlen. — Das Positron. — Röntgenstrahlen. — γ -Strahlen. — Kernumwandlungen durch geladene Teilchen. — Das Neutron. — Die Spaltung des Urans. — Die künstliche Radioaktivität. — Einzelne Ultrastrahlen. — Kaskadenschauer. — Teilchenarme Schauer. — Luftschauer. — Explosionsschauer.

Aus den ersten Besprechungen:

Es war eine glückliche Idee, gerade im gegenwärtigen Augenblick eine Schrift über die Wilsonsche Nebelkammer mit erläuternden Nebelkammerbildern herauszubringen. Verdankt doch gerade die Kernphysik, die sich immer noch im Zustande stürmischer Entwicklung befindet, der Wilsonschen Methode die wertvollsten Entdeckungen. In der Tat ist die Nebelkammer das einzige Instrument, das mit dem Nachweis elementarer Teilchen auch die Festlegung des Ladungssinnes und der Bahnspur verknüpft.

Das Buch gehört zu denen, die man erst aus der Hand legt, wenn man sie von Anfang bis zu Ende durchgelesen hat. Die 42 Seiten des I. Teiles sind dem Aufbau und dem Zubehör der Wilsonkammer selbst gewidmet. Gleich die Einführung ist packend, wenn man die Vorgeschichte der Nebelkammer erfährt und dabei wieder einmal die alte Wahrheit bestätigt findet, daß nicht blinder Zufall, sondern jahrzehntelange geduldige Beschäftigung mit einer rein wissenschaftlichen Fragestellung zu einer schönen Entdeckung geführt haben, ohne daß Wilson sich etwa von vornherein die Aufgabe gestellt hätte, eine Vorrichtung zur Sichtbarmachung radioaktiver Teilchen und einzelner Atome zu erfinden. Im II. Teil, der 80 Seiten umfaßt, werden ausgewählte Nebelbilder von α - und β -Strahlen, Positronen, Röntgenstrahlen, γ -Strahlen, Neutronen, künstlichen Kernumwandlungen und Höhenstrahlen samt den merkwürdigen Schauererscheinungen wiedergegeben und besprochen. Die Erläuterungen der Bilder sind erschöpfend und doch Muster an Einfachheit, Klarheit und eindringlicher Kürze. Zusammen mit der hervorragenden schönen Wiedergabe der Bilder leistet dieses Buch viel mehr, als der Titel erwarten läßt. Wir haben hier eine Einführung in die experimentelle Kernphysik vor uns, die schon lange ein Bedürfnis war und nicht nur den Spezialisten, sondern überhaupt den Physikern aller Richtungen und den physikalisch interessierten Chemikern hochwillkommen sein wird. Sorgfältige und umfassende Literaturangaben werden das Buch besonders denen ganz unentbehrlich machen, die sich in der Wilsonschen Nebelkammerverfahren einarbeiten wollen.

Professor Olusius, München, in „Die Naturwissenschaften“

S P R I N G E R — V E R L A G • B

Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation

Von

Gustav Doetsch

ord. Professor der Mathematik
an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br.

(„Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“, Band XLVII)

Mit 18 Figuren. XVI, 436 Seiten. 1937. RM 34.50

Inhaltsübersicht:

I. Teil: Allgemeine Theorie der Laplace-Transformation. Grundbegriffe der Funktionalanalysis. — Geschichtliches über die Laplace-Transformation. — Definition und analytische Eigenschaften der Laplace-Transformation. — Allgemeine funktionentheoretische Eigenschaften der l -Funktionen. — Die im Unendlichen regulären l -Funktionen. — Die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation. — Andere Umkehrformeln für die Laplace-Transformation. — Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen.

II. Teil: Reihenentwicklungen. Die Übertragung von Reihenentwicklungen.

III. Teil: Asymptotisches Verhalten von Funktionen. Abelsche und Taubersche Sätze. — Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung und die verschiedenen Arten von Asymptotik. — Abelsche Asymptotik. — Taubersche Asymptotik. — Indirekte Abelsche Asymptotik.

IV. Teil: Integralgleichungen. Integralgleichungen vom reellen Faltungstypus. — Funktionalrelationen mit Faltungsintegralen, insbesondere transzendente Additionstheoreme. — Integralgleichungen und Funktionalrelationen vom komplexen Faltungstypus.

V. Teil: Differentialgleichungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen. — Allgemeines über die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen durch Funktionaltransformationen. — Die Wärmeleitungsgleichung (parabolischer Typ). — Die Telegraphengleichung und die Wellengleichung (hyperbolischer Typ). — Die Potentialgleichung (elliptischer Typ). — Gleichungen mit variablen Koeffizienten. — Die Beziehungen zum Heaviside-Kalkül und zur sogenannten funktionentheoretischen Methode. — Huygenssches und Eulersches Prinzip. — Anhang. — Historische Bemerkungen. — Literatur- und Sachverzeichnis.

VERLAG · BERLIN

Artlich für den Anzeigenteil: Albert Meyer, Berlin-St.
Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
in Germany